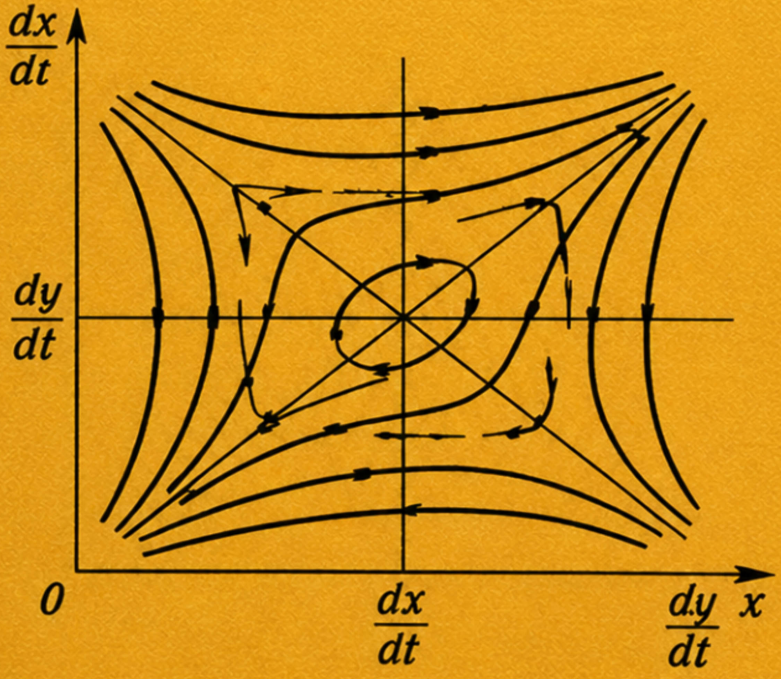
Р. М. ЖЕВНЯК
А. А. КАРПУК

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА



Часть 5

Р. М. ЖЕВНЯК,
А. А. КАРПУК

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Ч. V

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования БССР в качестве учебного пособия для студентов втузов

МИНСК
«ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»
1988

ББК 22.11я73
Ж45
УДК 51(075.8)

Рецензенты: кафедра высшей математики Московского энергетического института; д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры высшей математики Московского физико-технического института *М. В. Федорюк*.

1702010000—045
Ж ——————— 8—88
М 304(03)—88

ISBN 5-339-00007-9

© Издательство «Вышэйшая школа», 1988

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

17. Разностные уравнения. Z-преобразование. Обобщенные функции 5

17.1. Разностные уравнения 5
17.2. Z-преобразование 14
17.3. Дискретное преобразование Фурье . . 24
17.4. Обобщенные функции 28

18. Теория вероятностей 41

18.1. Элементы комбинаторики 41
18.2. Вероятность события 43
18.3. Условная вероятность 52
18.4. Последовательность независимых испытаний 57
18.5. Скалярные случайные величины 63
18.6. Векторные случайные величины 72
18.7. Числовые характеристики скалярных случайных величин 88
18.8. Числовые характеристики векторных случайных величин 103
18.9. Характеристические функции . . 110
18.10. Предельные теоремы теории вероятностей 114
18.11. Двумерное нормальное распределение 119

19. Элементы математической статистики 125

19.1. Выборка и ее характеристики . 125
19.2. Статистические оценки параметров распределения 133
19.3. Статистическая проверка гипотез 149
19.4. Линейная регрессия и корреляция 153

20. Случайные процессы 160

20.1. Конечные марковские цепи 160
20.2. Основные понятия теории случайных процессов 166
20.3. Основные случайные процессы 174

21. Основы численных методов 182

21.1. Приближенные числа и действия над ними 182
21.2. Алгоритмы . . 188
21.3. Интерполирование функций . 192
21.4. Решение линейных систем методом Гаусса 201
21.5. Итерационные методы решения уравнений и систем уравнений . . 206
21.6. Приближенное вычисление интегралов . . . 218
21.7. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений 225
21.8. Метод сеток решения задач математической физики 229

Ответы 242

Приложения 2[illegible]

Литература

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга является пятой, заключительной частью учебного пособия «Высшая математика» для студентов высших технических учебных заведений. Как и предыдущие четыре части, она написана на основе лекций, читаемых авторами студентам Минского радиотехнического института. В книге излагаются основы теории разностных уравнений, Z-преобразования и дискретного преобразования Фурье, обобщенных функций; теория вероятностей, математическая статистика и основы теории случайных процессов; элементарные численные методы.

Хотя разделы «Разностные уравнения», «Z-преобразование», «Дискретное преобразование Фурье» и «Обобщенные функции» не являются программными, авторы сочли необходимым включить их в данное пособие, поскольку они широко используются инженерами и исследователями при решении различного рода прикладных задач. В частности, разностные уравнения применяются при численном решении дифференциальных уравнений методом сеток, а обобщенные функции — в теории вероятностей, математической статистике, теории импульсных систем и др.

В связи с возросшей ролью теории вероятностей, математической статистики и основ теории случайных процессов в различных областях науки и техники эти разделы изложены достаточно подробно. Кроме того, программой по высшей математике для инженерно-технических специальностей вузов предусмотрено выполнение типового расчета по теории вероятностей и математической статистике. Поэтому материал соответствующих глав пособия изложен так, что студент, усвоивший их, вполне может справиться с выполнением данного расчета.

Основные численные методы высшей математики изложены строго в соответствии с программой. В книге имеется много примеров, иллюстрирующих основные положения теории. В конце параграфов даются задачи и упражнения для самостоятельного решения.

Нумерация глав, параграфов, формул и рисунков продолжает соответствующую нумерацию предыдущих частей. При ссылке на формулу или теорему указывается номер части пособия. Начало доказательства теорем, решения примеров и задач отмечено знаком □, а конец доказательства — знаком ■.

Авторы выражают благодарность рецензентам книги доктору физико-математических наук профессору кафедры высшей математики Московского физико-технического института М. В. Федорюку, члену-корреспонденту АН СССР, заведующему кафедрой высшей

математики Московского энергетического института доктору физико-математических наук профессору Похожаеву С. И. и профессору этой кафедры М. Л. Краснову, чье внимательное и объективное рецензирование способствовало улучшению содержания книги.

Авторы надеются, что заключительная часть пособия поможет студентам при изучении специальных разделов курса высшей математики, преподаваемых во втузе. По их мнению, все пять частей пособия представляют собой вполне законченное издание курса высшей математики для студентов втузов, рассчитанного на 510 часов. Авторы понимают, что в отдельных местах пособие не является методически завершенным, поэтому любая доброжелательная критика будет воспринята ими с благодарностью.

Все замечания и пожелания просим направлять по адресу: 220048, Минск, проспект Машерова, 11, издательство «Вышэйшая школа».

Авторы

17. РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ. Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

17.1. РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Решетчатые функции. В приложениях часто рассматриваются функции $f(t)$, определенные в дискретных точках t_1, t_2, ..., t_n, t_{n+1}, ... промежутка T, причем $t_{n+1} > t_n$. Такие функции называются *решетчатыми*. На рис. 17.1 изображен график функции $f(t) = t^2$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (точками отмечены значения функции).

Обозначив $f(t_n) = f_n$, получим последовательность (f_n) значений функции. В дальнейшем, положив $f_n = f(n)$, будем считать, что аргумент n принадлежит множеству целых чисел $\mathbf{Z}$.

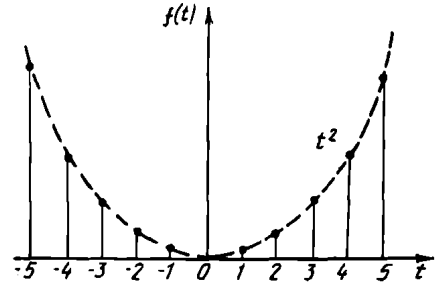


Рис. 17.1

Пример 1. Следующие функции являются решетчатыми:

а) $1(n) = 1$ — решетчатая единичная функция, $n = 0, 1, 2, \ldots$;

б) $f(n) = C = \text{const}$ — решетчатая постоянная функция, $n \in \mathbf{Z}$;

в) $f(n) = a^n$, $0 < a \neq 1$ — решетчатая показательная функция, $n \in \mathbf{Z}$;

г) $f(n) = n^k$ — решетчатая степенная функция, $n = 1, 2, \ldots$; $k \in \mathbf{R}$;

д) $\sin n\omega$, $\cos n\omega$ — решетчатые тригонометрические функции, $n \in \mathbf{Z}$.

Конечные разности решетчатых функций. *Конечной разностью первого порядка* $\Delta f(n)$ решетчатой функции $f(n)$ называется выражение

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n), \tag{17.1}$$

а *разностью второго порядка* $\Delta^2 f(n)$ — выражение

$$\Delta^2 f(n) = \Delta(\Delta f(n)) = \Delta f(n+1) - \Delta f(n) = (f(n+2) - f(n+1)) - (f(n+1) - f(n)) = f(n+2) - 2f(n+1) + f(n). \tag{17.2}$$

Аналогично для *разности третьего порядка* $\Delta^3 f(n)$

$$\Delta^3 f(n) = \Delta(\Delta^2 f(n)) = \Delta^2 f(n+1) - \Delta^2 f(n) = f(n+3) - 3f(n+2) + 3f(n+1) - f(n). \tag{17.3}$$

По индукции для *разности k-го порядка* $\Delta^k f(n)$ можно получить формулу

$$\Delta^k f(n) = \Delta(\Delta^{k-1} f(n)) = f(n+k) - C_k^1 f(n+k-1) + C_k^2 f(n+k-2) - \ldots + (-1)^i C_k^i f(n+k-i) + \ldots + (-1)^k f(n), \tag{17.4}$$

где C_k^i — биномиальные коэффициенты, определенные формулой (3.30), ч. I.

Формулы (17.1) — (17.4) определяют разности решетчатых функций через значения этих функций в целочисленных точках. Можно выразить саму решетчатую функцию $f(n)$ через ее разности различных порядков. В самом деле, из равенства (17.1) находим

$$f(n+1)=f(n)+\Delta f(n). \tag{17.5}$$

Аналогично из равенств (17.2) и (17.5)

$$\Delta^2 f(n)=f(n+2)-f(n+1)-\Delta f(n)=f(n+2)-f(n)-2\Delta f(n), \tag{17.6}$$

откуда

$$f(n+2)=f(n)+2\Delta f(n)+\Delta^2 f(n). \tag{17.7}$$

Точно так же из равенства (17.3) с учетом соотношений (17.5) — (17.7) получаем

$$\Delta^3 f(n)=\Delta^2 f(n+1)-\Delta^2 f(n)=f(n+3)-2f(n+2)+f(n+1)-$$
$$-\Delta^2 f(n)=f(n+3)-2f(n)-4\Delta f(n)-2\Delta^2 f(n)+f(n)+$$
$$+\Delta f(n)-\Delta^2 f(n)=f(n+3)-f(n)-3\Delta f(n)-3\Delta^2 f(n),$$

откуда $f(n+3)=f(n)+3\Delta f(n)+3\Delta^2 f(n)+\Delta^3 f(n)$.

По индукции можно аналогичным образом получить формулу

$$f(n+k)=f(n)+C_k^1\Delta f(n)+C_k^2\Delta^2 f(n)+\ldots+\Delta^k f(n).$$

Отсюда, в частности, при $n=0$ будем иметь

$$f(k)=f(0)+C_k^1\Delta f(0)+C_k^2\Delta^2 f(0)+\ldots+\Delta^k f(0).$$

Эти формулы определяют значения решетчатой функции через ее конечные разности до порядка k включительно. Они представляют собой дискретный аналог формул Тейлора для непрерывных функций.

Пример 2. Вычислить разности $\Delta^k f(n)$, $n=1, 2, \ldots$, если:
а) $f(n)=an^2+bn+c$, a, b, c — const;
б) $f(n)=e^{\alpha n}$, α — const.
□ а) Последовательно находим:

$$\Delta f(n)=f(n+1)-f(n)=a(n+1)^2+b(n+1)+c-(an^2+bn+c)=2an+a+b;$$
$$\Delta^2 f(n)=\Delta f(n+1)-\Delta f(n)=2a(n+1)+a+b-(2an+a+b)=2a;$$
$$\Delta^3 f(n)=\Delta^2 f(n+1)-\Delta^2 f(n)=2a-2a=0;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta^k f(n)\equiv 0,\ k=3, 4, \ldots$$

б) Аналогично

$$\Delta f(n)=e^{\alpha(n+1)}-e^{\alpha n}=e^{\alpha n}(e^{\alpha}-1);$$
$$\Delta^2 f(n)=e^{\alpha(n+1)}(e^{\alpha}-1)-e^{\alpha n}(e^{\alpha}-1)=e^{\alpha n}(e^{\alpha}-1)^2.$$

По индукции находим

$$\Delta^i f(n)=e^{\alpha n}(e^{\alpha}-1)^i,\ i=1, 2, \ldots$$

Основные понятия разностных уравнений. Разностные уравнения находят широкое применение в комбинаторике, теории вероятностей

и математической статистике, электронике, исчислении конечных разностей, в различных задачах физики и т. д.

Любое соотношение вида

$$F(n,\ x(n),\ \Delta x(n),\ \Delta^2 x(n),\ \ldots,\ \Delta^k x(n)) = 0, \tag{17.8}$$

связывающее решетчатую функцию $x(n)$ и ее разности до порядка k, называется *разностным уравнением k-го порядка*. Здесь F — заданная функция своих аргументов. Используя формулу (17.4), уравнение (17.8) можно преобразовать к виду

$$F_1(n,\ x(n),\ x(n+1),\ x(n+2),\ \ldots,\ x(n+k)) = 0. \tag{17.9}$$

Равенство (17.9) также называется разностным уравнением k-го порядка. Порядок этого уравнения определяется разностью $k = (n+k) - n$ наибольшего и наименьшего значений аргумента функции $x(n)$, входящей в уравнение. В дальнейшем будем рассматривать *линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами* вида

$$a_0 x(n+k) + a_1 x(n+k-1) + \ldots + a_{k-1} x(n+1) + a_k x(n) = f(n), \tag{17.10}$$

где a_i — const, $i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k$; $a_0 \neq 0$; $a_k \neq 0$; $x(n)$ — неизвестная решетчатая функция.

Если $f(n) \not\equiv 0$, то уравнение (17.10) называется *неоднородным*, если $f(n) \equiv 0$,— то *однородным*. *Решением уравнения* (17.10) называется решетчатая функция (последовательность) $x_{(n)} = \varphi(n)$, которая при подстановке ее в уравнение (17.10) превращает его в тождество при $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

По аналогии с задачей Коши для дифференциальных уравнений k-го порядка *задача с начальными данными для разностного уравнения* (17.10) (начальная задача) формулируется следующим образом: найти решетчатую функцию $x(n)$, удовлетворяющую уравнению (17.10) и начальным условиям

$$x(n_0) = x_0;\ x(n_0+1) = x_1;\ \ldots;\ x(n_0+k-1) = x_{k-1}, \tag{17.11}$$

где n_0 — некоторое начальное значение аргумента; $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{k-1}$ — заданные числа.

Решение $x(n)$ уравнения (17.10), удовлетворяющее начальным условиям (17.11), называется *частным решением* этого уравнения.

Уравнение (17.10) и начальные условия (17.11) позволяют найти значение

$$x(n_0+k) = \frac{1}{a_0}\Big(f(n_0) - a_1 x(n_0+k-1) - \ldots - a_{k-1} x(n_0+1) - a_k x(n_0)\Big).$$

Зная $x(n_0+k)$, последовательно можно найти $x(n_0+k+1)$, $x(n_0+k+2)$ и т. д.

Теория линейных разностных уравнений во многом сходна с теорией линейных дифференциальных уравнений. Справедливы приведенные ниже утверждения.

1°. Если $x_1(n)$, $x_2(n)$, ..., $x_l(n)$ — решения линейного однородного разностного уравнения k-го порядка

$$a_0x(n+k)+a_1x(n+k-1)+\ldots+a_kx(n)=0, \qquad (17.12)$$

то и их линейная комбинация

$$x(n)=\sum_{i=1}^{l} C_ix_i(n),\ C_i-\text{const},$$

также является решением этого уравнения.

Дадим теперь определение линейной зависимости и независимости решетчатых функций.

Решетчатые функции $x_1(n)$, $x_2(n)$, ..., $x_k(n)$ называются *линейно зависимыми,* если существуют постоянные числа α_1, α_2, ..., α_k, не все из которых равны нулю, такие, что

$$\alpha_1x_1(n)+\alpha_2x_2(n)+\ldots+\alpha_kx_k(n)=0,\ \forall_n. \qquad (17.13)$$

Если же равенство (17.13) выполняется лишь при $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_k=0$, то решетчатые функции называются *линейно независимыми.*

2°. (Структура общего решения линейного однородного разностного уравнения.) Всякое однородное разностное уравнение k-го порядка имеет ровно k линейно независимых решений $x_1(n)$, $x_2(n)$, ..., $x_k(n)$. Любое решение этого уравнения имеет вид

$$x^0(n)=C_1x_1(n)+C_2x_2(n)+\ldots+C_kx_k(n), \qquad (17.14)$$

где C_1, C_2, ..., C_k — некоторые константы.

Решение (17.14) при произвольных константах C_1, C_2, ..., C_k называется *общим решением* линейного однородного разностного уравнения.

3°. (Структура общего решения неоднородного разностного уравнения.) Всякое решение неоднородного линейного разностного уравнения (17.10) представляет собой сумму некоторого его частного решения $x^*(n)$ и общего решения $x^0(n)$ соответствующего однородного разностного уравнения (17.12).

Решение линейных однородных разностных уравнений. Рассмотрим линейное однородное разностное уравнение k-го порядка с постоянными коэффициентами

$$a_0x(n+k)+a_1x(n+k-1)+\ldots+a_{k-1}x(n+1)+a_kx(n)=0, \qquad (17.15)$$

где $a_0\neq 0$; $a_k\neq 0$.

Будем искать нетривиальное решение этого уравнения в виде $x(n)=\lambda^n$, где $\lambda\neq 0$ — некоторое число. Тогда $x(n+1)=\lambda^{n+1}$, $x(n+2)=\lambda^{n+2}$, ..., $x(n+k)=\lambda^{n+k}$. Подставив эти значения в уравнение (17.15), получим

$$a_0\lambda^{n+k}+a_1\lambda^{n+k-1}+\ldots+a_{k-1}\lambda^{n+1}+a_k\lambda^n=0$$

или

$$\lambda^n(a_0\lambda^k+a_1\lambda^{k-1}+\ldots+a_{k-1}\lambda+a_k)=0,\ \lambda\neq 0.$$

Отсюда получаем равенство

$$a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \ldots + a_{k-1}\lambda + a_k = 0, \qquad (17.16)$$

называемое *характеристическим уравнением* для разностного уравнения (17.15).

Итак, решетчатая функция $x(n) = \lambda^n$ является решением разностного уравнения (17.15), если число λ — корень характеристического уравнения (17.16). При этом возможны три случая: 1) уравнение (17.16) имеет ровно k различных действительных корней; 2) корни характеристического уравнения различны, но среди них имеются комплексные; 3) среди корней характеристического уравнения имеются кратные. Рассмотрим эти случаи.

1. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ — действительные и различные корни характеристического уравнения (17.16). Им отвечают k следующих линейно независимых решений:

$$x_1(n) = \lambda_1^n;\ x_2(n) = \lambda_2^n;\ \ldots;\ x_k(n) = \lambda_k^n. \qquad (17.17)$$

В этом случае общее решение линейного однородного разностного уравнения (17.15) имеет вид

$$x^0(n) = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + \ldots + C_k\lambda_k^n. \qquad (17.18)$$

Пример 3. Решить уравнение $x(n+2) - 3x(n+1) + 2x(n) = 0$.

□ Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$. Тогда, согласно равенствам (17.17), частными решениями уравнения являются функции $x_1(n) = 1^n \equiv 1$ и $x_2(n) = 2^n$, а общим решением — решетчатая функция $x^0(n) = C_1 + C_2 \cdot 2^n$.

2. Пусть среди различных корней характеристического уравнения (17.16) имеется комплексный корень $\lambda = \alpha + i\beta$. Поскольку коэффициенты разностного уравнения (17.15) — действительные, то и сопряженное комплексное число $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ также является корнем уравнения (17.16).

Представим комплексное число $\lambda = \alpha + i\beta$ в показательной форме $\lambda = \alpha + i\beta = re^{i\varphi}$, где $r = |\lambda| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $\varphi = \arg\lambda$, $\cos\varphi = \alpha/r$, $\sin\varphi = \beta/r$. Этому числу отвечает комплекснозначное решение

$$x(n) = \lambda^n = r^n e^{in\varphi} = r^n\cos n\varphi + ir^n\sin n\varphi.$$

Числу же $\overline{\lambda}$ будет отвечать комплексно-сопряженное решение

$$\overline{x(n)} = r^n\cos n\varphi - ir^n\sin n\varphi.$$

Как и в теории линейных дифференциальных уравнений, можно показать, что если комплекснозначная функция $x(n) = U(n) + iV(n)$ является решением линейного однородного разностного уравнения, то функции $U(n)$ и $V(n)$ — также решения этого уравнения. Отсюда заключаем, что решетчатые функции

$$x_1(n) = r^n\cos n\varphi;\ x_2(n) = r^n\sin n\varphi \qquad (17.19)$$

являются линейно независимыми решениями линейного однородного разностного уравнения (17.15), отвечающими паре комплексно-сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения (17.16).

Пример 4. Решить уравнение

$$x(n+3)+3x(n+2)+6x(n+1)+4x(n)=0. \tag{17.20}$$

□ Характеристическое уравнение

$$\lambda^3+3\lambda^2+6\lambda+4=(\lambda+1)(\lambda^2+2\lambda+4)=0$$

имеет корни $\lambda_1=-1$, $\lambda_{2,3}=-1\pm i\sqrt{3}$. Так как

$$\lambda_2=-1+i\sqrt{3}=2e^{i2\pi/3}=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right),$$

то, согласно формулам (17.19), числам $\lambda_{2,3}$ отвечают действительные решения $x_2(n)=2^n\cos(2\pi n/3)$ и $x_3(n)=2^n\sin(2\pi n/3)$. Числу $\lambda_1=-1$ отвечает решение $x_1(n)=(-1)^n$.

Итак, общее решение уравнения (17.20) имеет вид

$$x^0(n)=C_1(-1)^n+2^n\left(C_2\cos\frac{2\pi n}{3}+C_3\sin\frac{2\pi n}{3}\right).$$

3. Пусть λ — корень кратности m характеристического уравнения (17.16). Можно показать, что в этом случае ему отвечает m следующих линейно независимых решений:

$$x_1(n)=\lambda^n;\ x_2(n)=\lambda^n n;\ x_3(n)=\lambda^n n^2;\ \ldots;x_m(n)=\lambda^n n^{m-1}. \tag{17.21}$$

Пример 5. Найти решение разностного уравнения

$$x(n+3)-3x(n+1)-2x(n)=0.$$

□ Характеристическое уравнение $\lambda^3-3\lambda-2=(\lambda+1)^2(\lambda-2)=0$ имеет простой корень $\lambda_1=2$ и двукратный корень $\lambda_{2,3}=-1$. Тогда с учетом формул (17.21) получим общее решение исходного разностного уравнения в виде $x^0(n)=C_1 2^n+(C_2+C_3 n)(-1)^n$.

Пример 6. Решить начальную задачу

$$x(n+2)-x(n+1)-x(n)=0;\ x(0)=0;\ x(1)=1. \tag{17.22}$$

□ Заметим, что последовательность $(x(n))$, удовлетворяющая условиям (17.22), называется последовательностью *чисел Фибоначчи**.

Характеристическое уравнение $\lambda^2-\lambda-1=0$ имеет корни $\lambda_{1,2}=(1\pm\sqrt{5})/2$. Тогда общее решение уравнения (17.22) имеет вид

$$x(n)=C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Исходя из начальных условий, получаем

$$\left.\begin{aligned}&C_1+C_2=0;\\&C_1\frac{1+\sqrt{5}}{2}+C_2\frac{1-\sqrt{5}}{2}=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}&C_1=1/\sqrt{5};\\&C_2=-1/\sqrt{5}.\end{aligned}\right.$$

Тогда искомым частным решением будет решетчатая функция (последовательность чисел Фибоначчи)

$$x(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right),\ n=0,\ 1,\ \ldots$$

Замечание. Неоднородные линейные разностные уравнения в общем случае решаются способом вариации произвольных постоянных, подобным методу Лагранжа

* Фибоначчи (Леонардо Пизанский) (1180—1240) — итальянский математик.

для неоднородных линейных дифференциальных уравнений. В данном учебном пособии этот метод не рассматривается. В § 17.2 будет изложен метод решения разностных уравнений с помощью Z-преобразования.

Системы линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Будем рассматривать системы линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами 1-го порядка, записанных в нормальной форме:

$$\left.\begin{aligned} x_1(n+1) &= a_{11}x_1(n) + \ldots + a_{1k}x_k(n) + f_1(n);\\ x_2(n+1) &= a_{21}x_1(n) + \ldots + a_{2k}x_k(n) + f_2(n);\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_k(n+1) &= a_{k1}x_1(n) + \ldots + a_{kk}x_k(n) + f_k(n). \end{aligned}\right\} \qquad (17.23)$$

Здесь a_{ij} — постоянные действительные числа, $i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$; $f_i(n)$ — заданные решетчатые функции; $x_i(n)$ — неизвестные решетчатые функции.

Система (17.23) называется неоднородной, если не все $f_i(n) \equiv 0$. Если же $f_i(n) \equiv 0$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$, $\forall n$, то система называется однородной. Решением системы (17.23) называется набор k решетчатых функций $x_1(n) = \varphi_1(n)$, $x_2(n) = \varphi_2(n)$, $\ldots$, $x_k(n) = \varphi_k(n)$, подстановка которых в систему обращает каждое ее уравнение в тождество.

Начальные данные для системы (17.23) имеют вид

$$x_1(n_0) = x_{10};\ x_2(n_0) = x_{20};\ \ldots;\ x_k(n_0) = x_{k0}, \qquad (17.24)$$

где n_0 — некоторое начальное значение аргумента; $x_{10},\ x_{20},\ \ldots,\ x_{k0}$ — заданные числа. Решить начальную задачу для системы разностных уравнений (17.23) — это значит найти ее решение при начальных условиях (17.24).

Если ввести обозначения:

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} x_1(n)\\ x_2(n)\\ x_k(n) \end{pmatrix};\ A = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1k}\\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2k}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{k1}a_{k2}\ldots a_{kk} \end{bmatrix};\ \mathbf{f}(n) = \begin{pmatrix} f_1(n)\\ f_2(n)\\ \vdots\\ f_k(n) \end{pmatrix},$$

то систему (17.23) можно записать в векторно-матричном виде:

$$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n) + \mathbf{f}(n), \qquad (17.25)$$

а соответствующую однородную систему — в виде

$$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n). \qquad (17.26)$$

В равенствах (17.25), (17.26) предполагается, что определитель $|A| \neq 0$.

Решение линейных однородных систем разностных уравнений. Рассмотрим линейную однородную систему разностных уравнений с постоянными действительными коэффициентами

$$\left.\begin{aligned} x_1(n+1) &= a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + \ldots + a_{1k}x_k(n);\\ x_2(n+1) &= a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) + \ldots + a_{2k}x_k(n);\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_k(n+1) &= a_{k1}x_1(n) + a_{k2}x_2(n) + \ldots + a_{kk}x_k(n). \end{aligned}\right\} \qquad (17.27)$$

Как и в теории систем линейных однородных дифференциальных

уравнений, для системы разностных уравнений (17.27) справедливо утверждение: система (17.27) имеет ровно k линейно независимых решений $\mathbf{x}^1(n)$, $\mathbf{x}^2(n)$, ..., $\mathbf{x}^k(n)$; любое решение этой системы имеет вид

$$\mathbf{x}^0(n) = C_1\mathbf{x}^1(n) + C_2\mathbf{x}^2(n) + \ldots + C_k\mathbf{x}^k(n), \qquad (17.28)$$

где C_1, C_2, ..., C_k — произвольные константы.

Совокупность k линейно независимых решений $\mathbf{x}^1(n)$, $\mathbf{x}^2(n)$, ..., $\mathbf{x}^k(n)$ однородной системы (17.27) называется *фундаментальной системой решений.* Формула (17.28) определяет *общее решение однородной системы разностных уравнений* (17.27).

Будем искать нетривиальное решение системы (17.27) в виде

$$\left.\begin{array}{l} x_1(n) = \gamma_1\lambda^n; \\ x_2(n) = \gamma_2\lambda^n; \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_k(n) = \gamma_k\lambda^n \end{array}\right\} \Leftrightarrow \mathbf{x}(n) = \vec{\gamma}\lambda^n, \qquad (17.29)$$

где вектор $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k)^T$ и число λ подлежат определению. Подставив $\mathbf{x}(n)$ в систему (17.26), получим

$$(\vec{\gamma}\lambda^{n+1} = A\vec{\gamma}\lambda^n) \Leftrightarrow (A\vec{\gamma} = \lambda\vec{\gamma}). \qquad (17.30)$$

Таким образом, ненулевая решетчатая вектор-функция $\mathbf{x}(n) = \vec{\gamma}\lambda^n$ тогда и только тогда является решением системы (17.26), когда $\vec{\gamma}$ — собственный вектор матрицы A, а λ — отвечающее ему собственное значение матрицы.

Уравнение k-го порядка

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & ak2 & \ldots & a_{kk} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (17.31)$$

называется *характеристическим уравнением* системы (17.26). Решая его, находим собственное значение матрицы A системы. Координаты же собственного вектора $\vec{\gamma}$, отвечающего этому значению, найдем из системы

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11} - \lambda)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \ldots + a_{1k}\gamma_k = 0; \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22} - \lambda)\gamma_2 + \ldots + a_{2k}\gamma_k = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}\gamma_1 + a_{k2}\gamma_2 + \ldots + (a_{kk} - \lambda)\gamma_k = 0. \end{array}\right\} \qquad (17.32)$$

По формулам (17.29) записываем искомое решение.

Пример 7. Решить систему разностных уравнений

$$\left.\begin{array}{l} x(n+1) = -x(n) - 2y(n); \\ y(n+1) = 3x(n) + 4y(n) \end{array}\right\}$$

при начальных условиях $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

□ Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} (-1 - \lambda) - 2 \\ 3 \quad (4 - \lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$. Соответствующие им собственные векторы $\vec{\gamma}^1 =$

$= \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ и $\vec{\gamma}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. По формулам (17.28) с учетом соотношений (17.29) находим общее решение:

$$\begin{pmatrix} x(n) \\ y(n) \end{pmatrix} = C_1\vec{\gamma}^1 \cdot 2^n + C_2\vec{\gamma}^2 \cdot 1^n = C_1 \cdot 2^n \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

т. е. $x(n) = 2C_1 \cdot 2^n + C_2$, $y(n) = -3C_1 \cdot 2^n - C_2$, $n = 0, 1, \ldots$ Отсюда и из начальных условий получаем систему

$$\left.\begin{aligned} 2C_1 + C_2 &= 1; \\ -3C_1 - C_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -1; \\ C_2 = 3. \end{cases}$$

Таким образом, искомое решение начальной задачи $x(n) = -2 \cdot 2^n + 3$, $y(n) = 3 \cdot 2^n - 3$, $n = 0, 1, \ldots$

Пример 8. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x(n+1) &= x(n) - y(n); \\ y(n+1) &= x(n) + y(n). \end{aligned}\right\} \tag{17.33}$$

□ Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} (1-\lambda) & -1 \\ 1 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

имеет комплексно-сопряженные корни $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Отвечающие им собственные векторы $\vec{\gamma}^{1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \pm i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. По формулам (17.29) находим комплексные решения системы (17.33) для $\lambda = 1 + i$:

$$\begin{pmatrix} x_1(n) + ix_2(n) \\ y_1(n) + iy_2(n) \end{pmatrix} = \vec{\gamma}^1 (1+i)^n = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) (\sqrt{2})^n \times$$

$$\times \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right) = (\sqrt{2})^n \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos \frac{n\pi}{4} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin \frac{n\pi}{4} \right) +$$

$$+ i(\sqrt{2})^n \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos \frac{n\pi}{4} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin \frac{n\pi}{4} \right).$$

Отсюда действительными решениями системы (17.33) будут решетчатые вектор-функции:

$$\begin{pmatrix} x_1(n) \\ y_1(n) \end{pmatrix} = (\sqrt{2})^n \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos \frac{n\pi}{4} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin \frac{n\pi}{4} \right);$$

$$\begin{pmatrix} x_2(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix} = (\sqrt{2})^n \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos \frac{n\pi}{4} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin \frac{n\pi}{4} \right),$$

а общее решение системы есть вектор-функция

$$\begin{pmatrix} x(n) \\ y(n) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} x_1(n) \\ y_1(n) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} x_2(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix} = (\sqrt{2})^n \begin{pmatrix} -C_1 \sin \left(\frac{n\pi}{4} \right) + C_2 \cos \left(\frac{n\pi}{4} \right) \\ C_1 \cos \left(\frac{n\pi}{4} \right) + C_2 \sin \left(\frac{n\pi}{4} \right) \end{pmatrix},$$

т. е.

$$x(n) = (\sqrt{2})^n \left(-C_1 \sin \frac{n\pi}{4} + C_2 \cos \frac{n\pi}{4} \right);$$

$$y(n) = (\sqrt{2})^n \left(C_1 \cos \frac{n\pi}{4} + C_2 \sin \frac{n\pi}{4} \right).$$

Задачи и упражнения

1. Показать, что $\Delta^{k+1} f(n) = 0$ для $f(n) = C_0 n^k + C_1 n^{k-1} + \ldots + C_{k-1}$.

2. Показать, что $x(n) = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$ есть решение разностного уравнения $x(n+2) - 5x(n+1) + 6x(n) = 0$.

3. Найти значения $x(2)$, $x(3)$ для решения уравнения $x(n+2)-4x(n+1)+3x(n)=n$, если $x(0)=1$, $x(1)=2$.

4. Решить разностные уравнения:

а) $x(n+2)-2x(n+1)-x(n)=0$; $x(0)=4$, $x(1)=5$;
б) $x(n+2)-2x(n+1)+2x(n)=0$; $x(0)=1$, $x(1)=1$;
в) $x(n+3)+3x(n+2)+3x(n+1)+x(n)=0$.

5. Решить системы разностных уравнений:

а) $\left.\begin{aligned} x(n+1)-3x(n)-y(n)=0;\\ y(n+1)+5x(n)+y(n)=0;\end{aligned}\right\}$ б) $\left.\begin{aligned} x(n+1)=y(n)+z(n);\\ y(n+1)=z(n)+x(n);\\ z(n+1)=x(n)+y(n).\end{aligned}\right\}$

17.2. Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Понятие Z-преобразования. Пусть $f(n)$ — решетчатая функция (последовательность чисел), причем $f(n)\equiv 0$ при $n<0$. Функция $F(z)$ комплексной переменной z, определяемая равенством

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n}{z^n}, \tag{17.34}$$

называется *Z-преобразованием* решетчатой функции $f(n)$ или ее *преобразованием Лорана*. Часто **Z**-преобразование функции $f(n)$ обозначают $\mathbf{Z}\{f(n)\}$.

Если $f(n)$ — решетчатая функция, а $F(z)$ — ее **Z**-преобразование, то это соответствие символически будем записывать в виде $f(n)\doteqdot F(z)$. Если **Z**-преобразованию $F(z)$ отвечает решетчатая функция $f(n)$, будем писать $F(z)\fallingdotseq f(n)$.

Правую часть равенства (17.34) можно рассматривать как ряд Лорана функции $F(z)$. Найдем область сходимости этого ряда.

Пусть существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f(n)|}=R$. Тогда, согласно признаку Коши, ряд (17.34) сходится абсолютно, если

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{f(n)}{z^n}\right|}=\frac{1}{|z|}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f(n)|}=\frac{R}{|z|}<1.$$

Отсюда следует, что ряд (17.34) сходится абсолютно в области $|z|>R$, т. е. во внешности круга радиусом R с центром в точке O.

Покажем теперь, что в области $|z|\geqslant R_1>R$ (рис. 17.2) ряд (17.34) сходится равномерно. В самом деле, так как $|R_1/z|\leqslant 1$, то

$$\left|\frac{f(n)}{z^n}\right|=\left|\left(\frac{R_1}{z}\right)^n\frac{f(n)}{R_1^n}\right|=\left|\frac{R_1}{z}\right|^n\frac{|f(n)|}{R_1^n}\leqslant\frac{|f(n)|}{R_1^n}. \tag{17.35}$$

Рассмотрим числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{|f(n)|}{R_1^n}$. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|f(n)|}{R_1^n}}=\frac{1}{R_1}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f(n)|}=\frac{R}{R_1}<1,$$

то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |f(n)|/R_1^n$ сходится по признаку Коши. Согласно соотношению (17.35), этот ряд мажорирует ряд (17.34) в области $|z| \geqslant R_1 > R$. Тогда по признаку Вейерштрасса ряд (17.34) в этой области сходится равномерно к $F(z)$. Отсюда по теореме 15.9, ч. IV, функция $F(z)$ аналитическая в области $|z| \geqslant R_1 > R$.

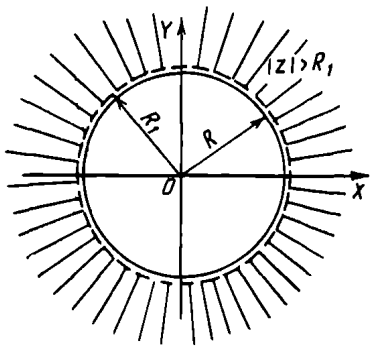


Рис. 17.2

Пример 1. Найти Z-преобразование следующих решетчатых функций:

а) $1(n)=1$; б) $a^n e^{\alpha n}$; в) $\frac{a^n}{n!}$.

□ а) По формуле (17.34)

$$Z\{1\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=\frac{1}{1-1/z}=\frac{z}{z-1},$$

если $|1/z|<1 \Leftrightarrow |z|>1$.

Итак,

$$1 \doteqdot \frac{z}{z-1}. \qquad (17.36)$$

Аналогично находим $(-1)^n \doteqdot \frac{z}{z+1}$.

б) Имеем

$$Z\{a^n e^{\alpha n}\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n e^{\alpha n}}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{ae^{\alpha}}{z}\right)^n=\frac{1}{1-ae^{\alpha}/z}=$$
$$=\frac{z}{z-ae^{\alpha}},$$

если $|z|>|a|e^{\alpha}$.

Таким образом,

$$a^n e^{\alpha n} \doteqdot \frac{z}{z-ae^{\alpha}}. \qquad (17.37)$$

В частности, при $a=1$ из этой формулы получаем

$$e^{\alpha n} \doteqdot \frac{z}{z-e^{\alpha}}, \qquad (17.38)$$

а при $\alpha=0$

$$a^n \doteqdot \frac{z}{z-a}. \qquad (17.39)$$

в) Далее,

$$Z\left\{\frac{a^n}{n!}\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a/z)^n}{n!}=e^{a/z}.$$

(напомним, что $\sum_{n=0}^{\infty}(x^n/n!)=e^x$).

Итак,

$$\frac{a^n}{n!} \doteqdot e^{a/z}. \qquad (17.40)$$

Свойства Z-преобразования. Рассмотрим основные свойства Z-преобразования.

1°. (Линейность.) Если $f(n) \doteqdot F(z)$, $g(n) \doteqdot G(z)$, то при любых α и β из $\mathbf{R}$

$$\alpha f(n) + \beta g(n) \doteqdot \alpha F(z) + \beta G(z). \tag{17.41}$$

Это свойство следует из определения Z-преобразования и линейности операции суммирования.

Пример 2. Согласно равенствам (17.41) и (17.37),

$$\mathbf{Z}\{a^n \sin \beta n\} = \mathbf{Z}\left\{a^n \frac{e^{i\beta n} - e^{-i\beta n}}{2i}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2i}(\mathbf{Z}\{a^n e^{i\beta n}\} - \mathbf{Z}\{a^n e^{-i\beta n}\}) =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{z}{z - ae^{i\beta}} - \frac{z}{z - ae^{-i\beta}}\right) =$$

$$= \frac{z}{2i} \frac{z - ae^{-i\beta} - z + ae^{i\beta}}{z^2 - a(e^{i\beta} + e^{-i\beta}) + a^2} = \frac{az \sin \beta}{z^2 - 2a \cos \beta + a^2}.$$

Итак,

$$a^n \sin \beta n \doteqdot \frac{az \sin \beta}{z^2 - 2a \cos \beta + a^2}. \tag{17.42}$$

Аналогично получим

$$a^n \cos \beta n \doteqdot \frac{z(z - a \cos \beta)}{z^2 - 2a \cos \beta + a^2}. \tag{17.43}$$

2°. (Z-преобразование смещенной решетчатой функции.) Пусть $f(n)$ — решетчатая функция. Рассмотрим следующие решетчатые функции:

$$f_1(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, 1, \ldots, k-1; \\ f(n-k), & n = k, k+1, \ldots; \end{cases}$$

$$f_2(n) = \begin{cases} 0, & n = -(k+1), -(k+2), \ldots; \\ f(n+k), & n = -k, -k+1, \ldots, 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Функция $f_1(n)$ получается из $f(n)$ смещением ее по оси n вправо на k единиц, а функция $f_2(n)$ — из $f(n)$ смещением последней на k единиц влево. Такие функции называются *смещенными решетчатыми функциями*. Их графики приведены на рис. 17.3. Таким образом, если

$$f(n) = \{f(0), f(1), \ldots, f(k), f(k+1), \ldots\},$$

то

$$f(n-k) = \{\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k \text{ раз}}, f(0), f(1), \ldots\} \tag{17.44}$$

и

$$f(n+k) = \{f(k), f(k+1), \ldots\}. \tag{17.45}$$

Найдем Z-преобразование смещенных решетчатых функций.

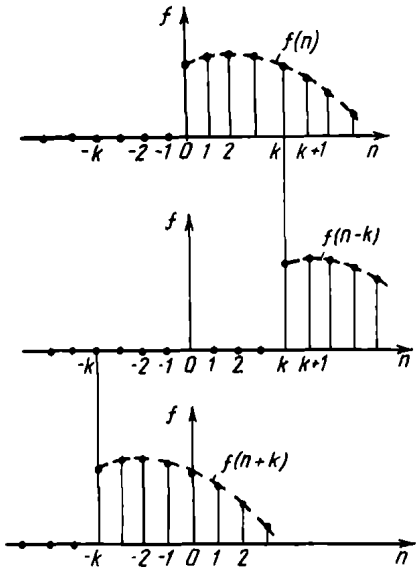


Рис. 17.3

Имеем

$$\mathbf{Z}\{f_1(n)\} = \mathbf{Z}\{f(n-k)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_1(n)}{z^n} =$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f(n-k)}{z^n} = |n-k=m| =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f(m)}{z^{m+k}} = \frac{1}{z^k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f(m)}{z^m} = \frac{1}{z^k} \mathbf{Z}\{f(n)\}.$$

Итак, если $f(n) \doteqdot F(z)$, то

$$f(n-k) \doteqdot \frac{1}{z^k} F(z). \quad (17.46)$$

Аналогично

$$\mathbf{Z}\{f(n+k)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_2(n)}{z^n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n+k)}{z^n} = |n+k=m| =$$

$$= \sum_{m=k}^{\infty} \frac{f(m)}{z^{m-k}} = \frac{1}{z^{-k}} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{f(m)}{z^m} = z^k \Big(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{f(m)}{z^m} -$$

$$- \sum_{m=0}^{k-1} \frac{f(m)}{z^m} \Big) = z^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f(m)}{z^m} - z^k \Big(f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z2} + \ldots +$$

$$+ \frac{f(k-1)}{z^{k-1}} \Big) = z^k F(z) - (z^k f(0) + z^{k-1} f(1) + \ldots + z f(k-1)).$$

Таким образом, если $f(n) \doteqdot F(z)$, то

$$f(n+k) \doteqdot z^k F(z) - (z^k f(0) + z^{k-1} f(1) + \ldots + z f(k-1)). \quad (17.47)$$

Пример 3. Найти: а) $\mathbf{Z}\{e^{\alpha(n-k)}\}$; б) $\mathbf{Z}\{a^{n+k}\}$.

□ а) По формуле (17.46) с учетом соотношения (17.38) получим

$$\mathbf{Z}\{e^{\alpha(n-k)}\} = \frac{1}{z^k} \frac{z}{z-e^{\alpha}} = \frac{1}{z^{k-1}(z-e^{\alpha})}. \quad (17.48)$$

Заметим, что в рассматриваемом примере решетчатая функция (последовательность) $e^{\alpha(n-k)}$, согласно соотношению (17.44), имеет вид

$$e^{\alpha(n-k)} = \{\underbrace{0,\ 0,\ \ldots,\ 0}_{k \text{ раз}},\ 1,\ e^{\alpha},\ e^{2\alpha},\ \ldots\}.$$

Если же этот факт не учесть и преобразовать функцию $e^{\alpha(n-k)}$ к виду $e^{\alpha(n-k)} = e^{-\alpha k} e^{\alpha n}$, то по формуле (17.38) с учетом линейности $\mathbf{Z}$-преобразования получим

$$\mathbf{Z}\{e^{\alpha(n-k)}\} = e^{-\alpha k}\, \mathbf{Z}\{e^{\alpha n}\} = \frac{z e^{-\alpha k}}{z-e^{\alpha}},$$

что не совпадает с верным результатом (17.48).

б) Согласно соотношениям (17.47) и (17.39),

$$\mathbf{Z}\{a^{n+k}\} = z^k \frac{z}{z-a} - (z^k + az^{k-1} + a^2 z^{k-2} + \ldots + a^{k-1}z).$$

Если же не учесть соотношения (17.45), то, как и в случае «а», придем к неверному результату:

$$\mathbf{Z}(a^{n+k}) = \mathbf{Z}\{a^k a^n\} = a^k \mathbf{Z}\{a^n\} = \frac{a^k z}{z-a}.$$

3°. Если $f(n) \doteqdot F(z)$, то

$$a^{-n} f(n) \doteqdot F(az). \tag{17.49}$$

Действительно,

$$\mathbf{Z}\{a^{-n} f(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{-n} f(n)}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{(az)^n} = F(az).$$

4°. (Дифференцирование $\mathbf{Z}$-преобразования.) Если $f(n) \doteqdot F(z)$, то

$$nf(n) \doteqdot -zF'(z). \tag{17.50}$$

В самом деле, дифференцируя аналитическую функцию $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n}$, получаем

$$F'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-nf(n)}{z^{n+1}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-nf(n)}{z^n}.$$

Отсюда

$$-zF'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(nf(n))}{z^n} = \mathbf{Z}\{nf(n)\},$$

что подтверждает справедливость формулы (17.50).

Используя равенство (17.50), по аналогии будем иметь

$$n^2 f(n) \doteqdot -z(-zF'(z))' = z^2 F''(z) + zF'(z). \tag{17.51}$$

Пример 4. Найти $\mathbf{Z}\{n\}$ и $\mathbf{Z}\{n^2\}$.

□ Так как $1 \doteqdot \frac{z}{z-1} = F(z)$ и $F'(z) = -\frac{1}{(z-1)^2}$, то по формуле (17.50) при $f(n) = 1(n) = 1$ получаем $n \doteqdot -zF'(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$.

Итак,

$$n \doteqdot z/(z-1)^2. \tag{17.52}$$

Аналогично из формулы (17.51) имеем

$$n^2 \doteqdot -z\left(-z\frac{-1}{(z-1)^2}\right)' = -z\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right)' = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}.$$

Таким образом,

$$n^2 \doteqdot z(z+1)/(z-1)^3. \tag{17.53}$$

Пример 5. Найти $\mathbf{Z}$-преобразование решетчатой функции, определяемой биноминальными коэффициентами

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

□ Пусть $f(n) = 1(n) = 1$. Тогда

$$1 \doteqdot \frac{z}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}.$$

Последовательно дифференцируя равенство $\frac{z}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$, находим:

$$(z-1)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{-(n+1)} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{z^n};$$

$$2!(z-1)^{-3} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)z^{-(n+2)} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{z^n};$$

$$3!(z-1)^{-4} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)(n+2)z^{-(n+3)} = \frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)(n+2)}{z^n}; \quad (17.54)$$

. . . . . .

$$k!(z-1)^{-(k+1)} = \frac{1}{z^k}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)}{z^n}.$$

Из второго равенства (17.54) следует, что

$$\frac{n(n+1)}{2!} \doteqdot \frac{z^2}{(z-1)^3}.$$

Применив здесь формулу смещения (17.46) при $k = 1$, получим

$$\frac{n(n-1)}{2!} \doteqdot \frac{z}{(z-1)^3}.$$

Далее из третьего равенства (17.54) следует, что

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3!} \doteqdot \frac{z^3}{(z-1)^4}.$$

Снова применив формулу (17.46) при $k = 2$, найдем, что

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \doteqdot \frac{z}{(z-1)^4}.$$

Наконец, из последнего равенства (17.54) получаем

$$\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)}{k!} \doteqdot \frac{z^k}{(z-1)^{k+1}}.$$

Применив формулу (17.46) при $k - 1$, получим

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \doteqdot \frac{z}{(z-1)^{k+1}}, \quad k = 1, 2\ldots \quad (17.55)$$

5°. (**Z**-преобразование свертки решетчатых функций.) *Сверткой* двух решетчатых функций $f(n)$ и $g(n)$ называется решетчатая функция

$$f(n) * g(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k)g(n-k). \quad (17.56)$$

Пусть $f(n) \doteqdot F(z)$, $g(n) \doteqdot G(z)$. Тогда справедлива формула

$$f(n) * g(n) \doteqdot F(z)G(z). \quad (17.57)$$

Действительно, так как $g(n-k)=0$ при $k>n$, то верхний предел суммы (17.56) может быть заменен на ∞, т. е.

$$f(n)*g(n)=\sum_{k=0}^{\infty} f(k)g(n-k).$$

Тогда по определению $\mathbf{Z}$-преобразования

$$f(n)*g(n) \doteqdot \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} f(k)g(n-k)\Big).$$

В силу абсолютной сходимости рядов в этом равенстве можно поменять местами порядок суммирования. Получим

$$f(n)*g(n) \doteqdot \sum_{k=0}^{\infty} f(k)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g(n-k)}{z^n}\Big).$$

Во внутренней сумме осуществим замену $(n-k=m)\Rightarrow(n=k+m)$. Тогда

$$f(n)*g(n) \doteqdot \sum_{k=0}^{\infty} f(k)\Big(\sum_{m=-k}^{\infty}\frac{g(m)}{z^{k+m}}\Big)=$$

$$=\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(k)}{z^k}\Big)\Big(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{g(m)}{z^m}\Big)=F(z)G(z),$$

поскольку $g(m)\equiv 0$ при $m=-k,\ -k+1,\ \ldots,\ -2,\ -1$.

Таким образом, справедливость формулы (17.57) установлена.

Пример 6. Пусть $f(n) \doteqdot F(z)$. Найти преобразование конечной суммы $S(n)=\sum_{k=0}^{n} f(k)$.

□ Так как $S(n)=f(n)*1(n)$ и $1 \doteqdot z/(z-1)$, то по формуле (17.57) имеем

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) \doteqdot \frac{z}{z-1}F(z). \qquad (17.58)$$

Полученные выше основные $\mathbf{Z}$-преобразования $F(z)$ решетчатых функций $f(n)$ сведем в таблицу (табл. 17.1).

Таблица 17.1

$f(n)$	$F(z)$
1	2
1	$z/(z-1)$
$(-1)^n$	$z/(z+1)$
$e^{\alpha n}$	$z/(z-e^{\alpha})$
a^n	$z/(z-a)$
$a^n e^{\alpha n}$	$z/(z-ae^{\alpha})$
$a^n/n!$	$e^{a/z}$

Окончание табл. 17.1

1	2
$a^n \sin \beta n$	$\dfrac{az \sin \beta}{z^2 - 2a \cos \beta + a^2}$
$a^n \cos \beta n$	$\dfrac{z(z - a \cos \beta)}{z^2 - 2a \cos \beta + a^2}$
n	$z/(z-1)^2$
n^2	$z(z+1)/(z-1)^3$
$\sum\limits_{k=0}^{n} f(k)$	$\dfrac{z}{z-1} F(z)$
C_n^k, $k = 1, 2, \ldots$	$z/(z-1)^{k+1}$
$f(n-k)$	$F(z)/z^k$
$f(n+k)$	$z^k F(z) - \sum\limits_{i=0}^{k-1} f(i) z^{k-i}$
$nf(n)$	$-zF'(z)$
$a^{-n} f(n)$	$F(az)$
$f(n) * g(n)$	$F(z)G(z)$

Восстановление решетчатой функции по ее Z-преобразованию. При восстановлении решетчатой функции в простейших случаях можно использовать таблицу основных Z-преобразований. В общем случае справедлива

Теорема 17.1. Пусть $f(n) \doteqdot F(z)$. Тогда

$$f(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} F(z) z^{n-1} dz, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{17.59}$$

где Γ — любая окружность радиусом $|z| = R_1 > R$ (см. рис. 17.2), обходимая против часовой стрелки.

□ Умножим равенство $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n)/z^n$ на z^{k-1} и проинтегрируем полученный результат по окружности $\Gamma: |z| = R_1 > R$. Поменяв порядок интегрирования и суммирования, что возможно в силу равномерной сходимости Z-преобразования в области $|z| > R_1 > R$, получим

$$\oint_{\Gamma} F(z) z^{k-1} dz = \oint_{\Gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{z^n} z^{k-1} dz = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \oint_{\Gamma} z^{k-n-1} dz. \tag{17.60}$$

Согласно формуле (15.53), ч. IV,

$$\oint_{\Gamma} z^{k-n-1} dz = \begin{cases} 0, & k - n - 1 \neq -1; \\ 2\pi i, & k - n - 1 = -1, \end{cases}$$

поэтому при $(k-n-1=-1)\Leftrightarrow(k=n)$ из равенства (17.60) получаем $\oint_\Gamma F(z)z^{n-1}dz = f(n)\cdot 2\pi i$, откуда и следует формула (17.59). ■

Интеграл (17.59) в общем случае можно вычислить с помощью вычетов. Именно:

$$f(n)=\sum_k \operatorname*{Res}_{z=z_k}(F(z)z^{n-1}), \tag{17.61}$$

где z_k — особые точки функции $F(z)$, лежащие внутри контура $|z|=R_1$.

Напомним, что вычет функции $F(z)z^{n-1}$ в простом полюсе z_0 вычисляется по формуле

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}(F(z)z^{n-1})=\lim_{z\to z_0}((z-z_0)F(z)z^{n-1}), \tag{17.62}$$

а в полюсе m-го порядка — по формуле

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}(F(z)z^{n-1})=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}((z-z_0)^m F(z)z^{n-1}). \tag{17.63}$$

Пусть $\mathbf{Z}$-преобразование функции $f(n)$ есть функция вида $F(z)=A(z)/B(z)$, причем $F(z)$ имеет простые полюсы z_1, z_2, ..., z_N. Тогда по формуле разложения (16.48), ч. IV,

$$f(n)=\sum_{k=1}^{N}\frac{A(z_k)}{B'(z_k)}z_k^{n-1}. \tag{17.64}$$

Пример 7. Найти решетчатую функцию $f(n)$ по известному $\mathbf{Z}$-преобразованию $F(z)$:

а) $\dfrac{z-e^a}{z^2+3z+2}$; б) $\dfrac{z+1}{(z-1)(z+2)(z-3)}$; в) $\dfrac{z+2}{(z-4)^3}$.

□ а) Так как $z^2+3z+2=(z+1)(z+2)$, то функция $\dfrac{z-e^a}{z^2+3z+2}$ имеет простые полюсы $z=-1$ и $z=-2$. Тогда по формуле (17.64) находим, что

$$f(n)=\frac{z-e^a}{(z^2+3z+2)'}\Big|_{z=1}(-1)^{n-1}+\frac{z-e^a}{(z^2+3z+2)'}\Big|_{z=-2}(-2)^{n-1}=$$
$$=(1+e^a)(-1)^n+(2+e^a)(-2)^{n-1};$$

б) Разложим $F(z)$ на простейшие дроби:

$$\frac{z+1}{(z-1)(z+2)(z-3)}=-\frac{1}{3(z-1)}-\frac{1}{15(z+2)}+\frac{2}{5(z-3)}.$$

Так как $a^n \doteqdot z/(z-a)$, то по формуле смещения получаем

$$a^{n-k} \doteqdot \frac{1}{z^{k-1}(z-a)}. \tag{17.65}$$

Поэтому

$$\frac{1}{z-1}\doteqdot 1^{n-1}=1;\quad \frac{1}{z+2}\doteqdot(-2)^{n-1};\quad \frac{1}{z-3}\doteqdot 3^{n-1}.$$

Тогда

$$\frac{z+1}{(z-1)(z+2)(z-3)}\doteqdot -\frac{1}{3}-\frac{1}{15}(-2)^{n-1}+\frac{2}{5}\cdot 3^{n-1}.$$

а) Точка $z=4$ — полюс 3-го порядка для $F(z)$. По формуле (17.61) с учетом формулы (17.63) получаем

$$f(n)=\frac{1}{2}\left((z-4)^3\frac{z+2}{(z-4)^3}z^{n-1}\right)\Big|''_{z=4}=$$
$$=\frac{1}{2}((z+2)z^{n-1})\Big|''_{z=4}=\frac{n(n-1)}{2}4^{n-2}+(n-1)(n-2)4^{n-3}=(n-1)(3n-2)4^{n-3}.$$

Решение линейных разностных уравнений и систем уравнений с помощью Z-преобразования. Пусть даны линейное разностное уравнение k-го порядка с постоянными коэффициентами

$$a_0x(n+k)+a_1x(n+k-1)+\ldots+a_{k-1}x(n+1)+$$
$$+a_kx(n)=f(n) \qquad (17.66)$$

и начальные условия:

$$x(0)=x_0;\ x(1)=x_1;\ \ldots;\ x(k-1)=x_{k-1}. \qquad (17.67)$$

Решение линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами методом Z-преобразования производится по схеме применения преобразования Лапласа к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Применив Z-преобразование с учетом его свойств к обеим частям разностного уравнения (17.66), получим алгебраическое операторное уравнение относительно функции $X(z) \doteqdot x(n)$. По найденному $X(z)$ восстановим искомое решение — решетчатую функцию $f(n)$.

Проиллюстрируем применение этой схемы к решению линейных разностных уравнений и их систем примерами.

Пример 8. Решить уравнения:

а) $x(n+2)-5x(n+1)+6x(n)=0,\ x(0)=1,\ x(1)=2.$

б) $x(n+2)+x(n)=1-(-1)^n,\ x(0)=0,\ x(1)=1.$

□ а) Пусть $x(n) \doteqdot X(z)$. Тогда с учетом начальных условий и формулы (17.47) имеем:

$x(n+1) \doteqdot zX(z)-x(0)z=zX(z)-z;$

$x(n+2) \doteqdot z^2X(z)-x(0)z^2-x(1)z=z^2X(z)-z^2-2z.$

Применив Z-преобразование к обеим частям исходного разностного уравнения, получим операторное уравнение относительно функции $X(z)$:

$$z^2X(z)-z^2-2z-5zX(z)+5z+6X(z)=0$$

или

$$(z^2-5z+6)X(z)=z^2-3z.$$

Отсюда

$$X(z)=\frac{z^2-3z}{z^2-5z+6}=\frac{z}{z-2} \doteqdot 2^n=x(n).$$

Итак, искомое решение $x(n)=2^n$.

б) Пусть $x(n) \doteqdot X(z)$. Тогда из разностного уравнения и начальных условий имеем:

$$x(n+2) \doteqdot z^2X(z)-z;\ 1-(-1)^n \doteqdot \frac{z}{z-1}-\frac{z}{z+1}=\frac{2z}{z^2-1}.$$

Тем самым получим операторное уравнение

$$(z^2+1)X(z)=z+\frac{2z}{z^2-1}=\frac{z(z^2+1)}{z^2-1}.$$

Отсюда

$$X(z)=\frac{z}{z^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+1}\right)\doteq\frac{1}{2}\left(1^{n-1}+(-1)^{n-1}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}(1+(-1)^{n-1})=x(n).$$

Пример 9. Решить систему разностных уравнений

$$\left.\begin{array}{l} x(n+1)-x(n)+y(n)=3^n; \\ y(n+1)+2x(n)=-3^n,\ x(0)=3,\ y(0)=0. \end{array}\right\}$$

□ Пусть $x(n)\doteq X(z)$, $y(n)\doteq Y(z)$. Тогда $x(n+1)\doteq zX(z)-3$, $y(n+1)\doteq zY(z)$, $3^n\doteq z/(z-3)$, и операторная система принимает вид

$$\left.\begin{array}{l} zX(z)-3x-X(z)+Y(z)=\dfrac{z}{z-3}; \\ zY(z)+2X(z)=-\dfrac{z}{z-3} \end{array}\right\}$$

или

$$\left.\begin{array}{l} (z-1)X(z)+Y(z)=(3z^2-8z)/(z-3); \\ 2X(z)+zY(z)=-z/(z-3). \end{array}\right\}$$

Решая эту систему, находим:

$$X(z)=\frac{3z^3-8z^2+z}{(z+1)(z-2)(z-3)};\quad Y(z)=\frac{-7z^2+17z}{(z+1)(z-2)(z-3)}.$$

По формуле (17.61) восстанавливаем искомое решение:

$$x(n)=(-1)^n+2^n+3^n;\ y(n)=2(-1)^n-2^n-3^n.$$

Задачи и упражнения

1. Найти Z-преобразование функций:
а) $a^n\operatorname{sh}\beta n$; б) $a^n\operatorname{ch}\beta n$; в) $f(0)=0$, $f(n)=1/n$, $n\geqslant 1$; г) $f(0)=0$, $f(n)=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, $n\geqslant 1$.

2. Найти Z-преобразование суммы:
а) $\sum\limits_{k=0}^{n}k^2$; б) $\sum\limits_{k=0}^{n-1}f(k)$.

3. Найти Z-преобразование функции $f(n)=(n+1)/n!$.
Указание. Воспользоваться формулой (17.34) и найти сумму полученного ряда его почленным интегрированием.

4. Решить разностные уравнения:
а) $x(n+2)-6x(n+1)+9x(n)=n\cdot 3^n$, $x(0)=x(1)=0$;
б) $x(n+2)-4x(n)=4^n$, $x(0)=x(1)=1$.

5. Решить системы разностных уравнений:
а) $\left.\begin{array}{l} x(n+1)+y(n)=1; \\ y(n+1)+4x(n)=0,\ x(0)=y(0)=0; \end{array}\right\}$

б) $\left.\begin{array}{l} x(n+1)=4x(n)-y(n)+1; \\ y(n+1)=x(n)+2y(n),\ x(0)=y(0)=1. \end{array}\right\}$

17.3. ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Понятие дискретного преобразования Фурье. Дискретное преобразование Фурье находит широкое применение в частотных методах исследования различного рода линейных дискретных систем.

Рассмотрим числовую последовательность $(f(n))$, $n\in\mathbf{Z}$, удовлетворяющую условию абсолютной сходимости, т. е.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)| = M < +\infty. \tag{17.68}$$

Дискретным преобразованием Фурье заданной последовательности (решетчатой функции) $(f(n))$ называется функция

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\, e^{-in\omega},\ \omega \in \mathbf{R}. \tag{17.69}$$

Функция $F(\omega)$ называется *спектральной характеристикой решетчатой функции* $f(n)$.

Часто рассматривается решетчатая функция $f(n)$, определенная для $n = 0, 1, \ldots$ Для таких функций дискретное преобразование Фурье имеет вид

$$F(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, e^{-in\omega}. \tag{17.70}$$

Оно называется *односторонним дискретным преобразованием Фурье.*

Дискретное преобразование Фурье функции $f(n)$ часто обозначают

$$\mathbf{F}\{f(n)\} = F(\omega).$$

Покажем, что для решетчатых функций $f(n)$, удовлетворяющих условию (17.68), ряд (17.69) сходится абсолютно и равномерно для всех $\omega \in \mathbf{R}$. Действительно, с учетом соотношения (17.68) имеем

$$\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-in\omega}\right| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)|\, |e^{-in\omega}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)| = M < +\infty,$$

т. е. для ряда (17.69) ряд (17.68) является мажорантным. Согласно признаку Вейерштрасса, ряд (17.69) сходится абсолютно и равномерно для всех $\omega \in \mathbf{R}$. Тогда по теореме 15.9, ч. IV, функция $F(\omega)$ — аналитическая для всех ω.

Пример 1. Найти дискретное преобразование Фурье функций ($n = 0, 1, \ldots$): а) a^n, $|a| < 1$; б) $e^{-\alpha n}$, $\alpha > 0$; в) $a^n/n!$, $a \in \mathbf{R}$.

□ а) Так как $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n = \dfrac{1}{1-a}$ при $|a| < 1$, то для функции a^n условие (17.68) выполнено. Тогда по формуле (17.70)

$$\mathbf{F}\{a^n\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-in\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-i\omega})^n = \frac{1}{1-ae^{-i\omega}} = \frac{e^{i\omega}}{e^{i\omega}-a},$$

поскольку $|ae^{-i\omega}| = |a| < 1$.

б) Так как $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha n} = \dfrac{e^{\alpha}}{e^{\alpha}-1}$, то

$$\mathbf{F}\{e^{-\alpha n}\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha n} e^{-in\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)n} =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-(\alpha+i\omega)}} = \frac{e^{\alpha+i\omega}}{e^{\alpha+i\omega}-1}.$$

в) Имеем

$$\mathbf{F}\left\{\frac{a^n}{n!}\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n e^{-in\omega}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ae^{-i\omega})^n}{n!}=e^{ae^{-i\omega}}.$$

Свойства дискретного преобразования Фурье. Дискретное преобразование Фурье обладает следующими свойствами.

1°. (Линейность.) Если $\mathbf{F}\{f(n)\}=F(\omega)$, $\mathbf{F}\{g(n)\}=G(\omega)$,

то $$\mathbf{F}\{\alpha f(n)+\beta g(n)\}=\alpha F(\omega)+\beta G(\omega),\ \forall\,\alpha,\beta\in\mathbf{R}.$$

Это свойство следует из определения дискретного преобразования Фурье и линейности операции суммирования.

Пример 2. Найти одностороннее дискретное преобразование Фурье функций ($|a|<1$):

а) $a^n\sin\beta n$; б) $a^n\cos\beta n$.

В силу линейности дискретного преобразования Фурье по формуле (17.70) находим

$$\mathbf{F}\{a^n\sin\beta n\}=\mathbf{F}\left\{a^n\frac{e^{i\beta n}-e^{-i\beta n}}{2i}\right\}=\frac{1}{2}\cdot\left(\mathbf{F}\{(ae^{i\beta})^n\}-\mathbf{F}\{(ae^{-i\beta})^n\}\right)=$$

$$=\frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(ae^{i\beta})^n\cdot e^{-i\omega n}-\sum_{n=0}^{\infty}(ae^{-i\beta})^n e^{-i\omega n}\right)=$$

$$=\frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(ae^{-i(\omega-\beta)})^n-\sum_{n=0}^{\infty}(ae^{-i(\omega+\beta)})^n\right)=$$

$$=\frac{1}{2i}\left(\frac{e^{i(\omega-\beta)}}{e^{i(\omega-\beta)}-a}-\frac{e^{i(\omega+\beta)}}{e^{i(\omega+\beta)}-a}\right)=\frac{a\sin\beta e^{i\omega}}{e^{2i\omega}-2a\cos\beta e^{i\omega}+a^2}.$$

б) Аналогично получим

$$\mathbf{F}\{a^n\cos\beta n\}=\frac{e^{i\omega}(e^{i\omega}-a\cos\beta)}{e^{2i\omega}-2a\cos\beta e^{i\omega}+a^2}.$$

2°. Если $\mathbf{F}\{f(n)\}=F(\omega)$, то при $k\geqslant 0$

$$\mathbf{F}\{f(n\pm k)\}=e^{\pm ik\omega}F(\omega). \tag{17.71}$$

В самом деле,

$$\mathbf{F}\{f(n+k)\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n+k)e^{-in\omega}=|\,n+k=m\,|=$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}f(m)e^{-i(m-k)\omega}=e^{ik\omega}\sum_{m=-\infty}^{\infty}f(m)e^{-im\omega}=e^{ik\omega}F(\omega).$$

Второе соотношение из равенств (17.71) доказывается аналогично.

3°. Для одностороннего дискретного преобразования Фурье справедлива формула

$$\mathbf{F}\{e^{-\alpha n}f(n)\}=F(\omega+\alpha),\ \alpha>0, \tag{17.72}$$

где $\mathbf{F}\{f(n)\}=F(\omega)$.

4°. (Дифференцирование дискретного преобразования Фурье.) Если $\mathbf{F}\{f(n)\}=F(\omega)$, то

$$\mathbf{F}\{n^k f(n)\}=-i^k F^{(k)}(\omega). \tag{17.73}$$

Действительно, дифференцируя последовательно равенство (17.69) по ω, получаем

$$F'(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-in)f(n)e^{-in\omega}=-i\sum_{n=-\infty}^{\infty}nf(n)e^{-in\omega}=-i\mathbf{F}\{f(n)n\};$$

$$F''(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-in)^2f(n)e^{-in\omega}=(-i)^2\mathbf{F}\{n^2f(n)\},$$

. . . . . .

$$F^{(k)}(\omega)=(-i)^k\mathbf{F}\{n^kf(n)\}.$$

Из последнего равенства и следует формула (17.73).

5°. Как и в случае **Z**-преобразования, показывается, что для свертки $f(n)*g(n)=\sum_{k=-n}^{n}f(n)g(n-k)$ решетчатых функций $f(n)$ и $g(n)$ справедлива формула

$$\mathbf{F}\{f(n)*g(n)\}=F(\omega)G(\omega), \tag{17.74}$$

где $\mathbf{F}\{f(n)\}=F(\omega)$; $\mathbf{F}\{g(n)\}=G(\omega)$.

Восстановление решетчатой функции по ее дискретному преобразованию Фурье. Покажем, что если

$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)e^{-in\omega}, \tag{17.75}$$

то

$$f(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(\omega)e^{in\omega}d\omega. \tag{17.76}$$

Действительно, умножим обе части равенства (17.75) на $e^{ik\omega}$ и проинтегрируем их почленно от $-\pi$ до π. Получим

$$\int_{-\pi}^{\pi}F(\omega)e^{ik\omega}d\omega=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)e^{-i(n-k)\omega}d\omega=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i(n-k)\omega}d\omega=2\pi f(n),$$

так как $\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i(n-k)\omega}d\omega=\begin{cases}2\pi, & k=n\\ 0, & k\neq n\end{cases}$ (операция перестановки местами интегрирования и суммирования законна в силу равномерной сходимости ряда (17.75)).

Пример 3. Найти решетчатую функцию $f(n)$, если $\mathbf{F}\{f(n)\}=e^{i\alpha\omega}$, α — не целое число.

□ По формуле (17.76)

$$f(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\alpha\omega}e^{in\omega}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{i(\alpha+n)\omega}}{i(\alpha+n)}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=$$

$$=\frac{\sin(\alpha+n)\pi}{(\alpha+n)\pi},\ n\in\mathbf{Z}.$$

Задачи и упражнения

1. Найти одностороннее дискретное преобразование Фурье функции $a^n e^{-an}$, $|a| < e^{\alpha}$, $\alpha > 0$.

2. Восстановить решетчатую функцию по ее дискретному преобразованию Фурье $F(\omega) = \operatorname{sh} i\alpha\omega$, $\alpha \notin \mathbf{Z}$.

17.4. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Понятие дельта-функции. Впервые строгое определение обобщенных функций ввел советский математик С. Л. Соболев в 1936 г. В последующем теория этих функций была развита французским математиком Л. Шварцем в 1950—1951 гг. Понятие обобщенной функции было введено в связи с трудностями решения некоторых задач математической физики, квантовой механики, электромагнетизма, где понадобилось использовать разрывные функции для описания точечных масс, точечных источников поля, сосредоточенных импульсов и т. д.

В 1926 г. английский физик П. Дирак ввел понятие дельта-функции $\delta(x)$, определяемой соотношением

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0; \\ \infty, & x = 0, \end{cases} \tag{17.77}$$

причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1. \tag{17.78}$$

С точки зрения классического анализа такая функция не имеет смысла, так как в нем не существует функций, удовлетворяющих соотношениям (17.77) и (17.78).

С физической точки зрения δ-функция Дирака представляет собой плотность единичного заряда, помещенного в начале координат. Если заряд имеет величину m, то его плотность $\rho(x) = m\delta(x)$.

Пространство основных функций. *Основной функцией* называется бесконечно дифференцируемая функция $\varphi(x)$ действительной переменной x, обращающаяся в нуль вне некоторого конечного промежутка $K \subset \mathbf{R}$. Множество K для каждой функции предполагается своим. Наименьшее замкнутое множество K, вне которого функция $\varphi(x)$ обращается в нуль, называется *носителем* этой функции. На рис. 17.4 носителем функции $\varphi(x)$ является отрезок $[a, b]$, вне которого функция обращается в нуль.

Обозначим через D пространство бесконечно дифференцируемых функций $f(x)$ с ограниченными носителями. Отрезок K, вне которого функция обращается в нуль, может быть различным для различных $\varphi \in D$. Часто эти функции называются *финитными*.

Пример 1. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{|ab|}{(x-a)(b-x)}}, & x \in (a, b); \\ 0, & x \notin (a, b). \end{cases}$$

График этой функции приведен на рис. 17.5. Она является бесконечно дифференцируемой и имеет носитель $K=[a, b]$.

Определим сходимость в пространстве D. Будем говорить, что последовательность функций $(\varphi_n(x))\in D$ сходится при $n\to\infty$ к функции $\varphi(x)\in D$, если:

1) носители функций $\varphi_n(x)$ сосредоточены на одном и том же замкнутом множестве K;

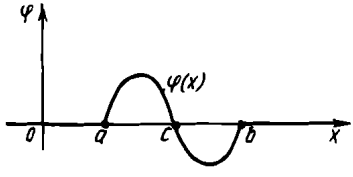


Рис. 17.4

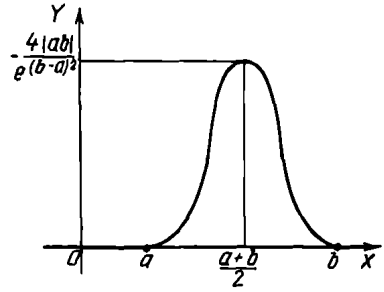


Рис. 17.5

2) производные произвольного порядка m функций $\varphi_n(x)$ равномерно сходятся при $n\to\infty$ к $\varphi^{(m)}(x)$, т. е. $\varphi_n^{(m)}(x)\to\varphi^{(m)}(x)$, причем сходимость равномерная по x к $\varphi^{(m)}(x)$ для каждого m.

Понятие линейного непрерывного функционала. Пусть U и V — линейные пространства. Напомним, что отображение $f: U\to V$ называется линейным оператором, если

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y),\ \forall x,\ y\in \mathbf{U},\ \forall \alpha,\ \beta\in \mathbf{R}.$$

Линейный оператор $f: U\to\mathbf{R}$, принимающий только числовые значения, называется *линейным функционалом.*

Пример 2. Пусть U — пространство интегрируемых на $[a, b]$ функций $\varphi(x)$, а $g(x)$ — некоторая непрерывная на $[a, b]$ функция. Тогда

$$f(\varphi)=\int_a^b \varphi(x)g(x)dx=I \tag{17.79}$$

есть линейный функционал, ставящий в соответствие каждой функции $\varphi(x)\in U$ число $I=I(\varphi)$.

Пример 3. Пусть $U=C[a, b]$ — пространство непрерывных на $[a, b]$ функций $\varphi(x)$ и x_0 — произвольная точка из $[a, b]$. Тогда оператор

$$\delta_{x_0}(\varphi)=\varphi(x_0), \tag{17.80}$$

ставящий каждой функции $\varphi(x)\in C[a, b]$ ее значение в точке x_0, есть линейный функционал.

Линейный функционал f называется *непрерывным в точке* $\varphi\in U$, если для любой последовательности $(\varphi_n)\in U$, сходящейся к φ,

$$\lim_{n\to\infty} f(\varphi_n)=f(\varphi). \tag{17.81}$$

Линейный функционал называется непрерывным на U, если он непрерывен в каждой точке $\varphi\in U$.

Докажем, что функционал (17.80) является непрерывным. В самом деле, пусть $\varphi_n(x)$ сходится равномерно к $\varphi(x)$ на $[a, b]$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x_0) = \varphi(x_0)$ или $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_{x_0}(\varphi_n) = \delta_{x_0}(\varphi)$, а это и означает, что функционал $\delta_{x_0}(\varphi)$ непрерывен.

Обобщенные функции. *Обобщенной функцией* называется любой линейный непрерывный функционал f на пространстве D финитных функций. Значение этого функционала на финитной функции $\varphi \in D$ будем обозначать $f(\varphi) = (f, \varphi)$.

Таким образом, функционал f, определяющий обобщенную функцию, удовлетворяет следующим условиям:

1) для любых α, β из $\mathbf{R}$ и φ_1, φ_2 из D

$$(f, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha(f, \varphi_1) + \beta(f, \varphi_2) = \alpha f(\varphi_1) + \beta f(\varphi_2);$$

2) если $\varphi_n \to \varphi$ в смысле сходимости в пространстве D, то $\lim\limits_{n\to\infty} (f, \varphi_n) = (f, \varphi)$.

Функция f называется *локально интегрируемой*, если она интегрируема на любом конечном интервале.

Покажем, что если f — локально интегрируемая функция, то она может быть отождествлена с некоторой обобщенной функцией.

Действительно, из определения основной функции следует, что интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$, $\varphi \in D$ представляет собой непрерывный линейный функционал на D. Таким образом, с функцией f можно связать обобщенную функцию $f(\varphi)$, такую, что

$$(f, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in D. \tag{17.82}$$

Итак, каждой обычной локально интегрируемой функции f по формуле (17.82) соответствует обобщенная функция.

Пример 4. Обобщенную функцию Дирака $\delta(x)$ можно определить соотношением

$$(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0), \quad \forall\, \varphi(x) \in D. \tag{17.83}$$

Выше доказана непрерывность этого функционала.

Смещенной δ-функцией или *обобщенной функцией Дирака*, сосредоточенной в точке x_0, называется функция $\delta(x - x_0)$, определяемая равенством

$$(\delta(x - x_0), \varphi(x)) = \varphi(x_0), \quad \forall \varphi \in D. \tag{17.84}$$

Пример 5. Определим функционал f, ставящий в соответствие каждой функции $\varphi \in D$ число

$$(f, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(n). \tag{17.85}$$

Здесь для каждой конкретной функции $\varphi \in D$ ряд, стоящий справа, представляет собой конечную сумму. Поэтому величина (17.85) для каждой функции $\varphi \in D$ является вполне определенной.

Если обобщенная функция f представляется в виде (17.82), то она называется *регулярной,* в противном случае — *сингулярной.*

Линейный функционал δ не является регулярной обобщенной функцией. Убедимся в этом. Предположим, что справедливо равенство

$$\varphi(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta(x)dx,\ \forall\varphi\in D. \tag{17.86}$$

Рассмотрим функцию $\varphi(x)$ из примера 1 при $b=-a$, т. е.

$$\varphi(x)=\begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}, & |x|<a;\\ 0, & |x|>a.\end{cases}$$

Тогда, согласно равенству (17.86), должно быть

$$\int_{-a}^{a}\varphi(x)e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}dx=\varphi(0)=e^{-1}.$$

Но здесь при $a\to 0$ интеграл слева стремится к нулю, что приводит к противоречию. Следовательно, δ-функцию нельзя представить в виде (17.86), т. е. обобщенная δ-функция является сингулярной.

Операции над обобщенными функциями. В пространстве обобщенных функций вводятся следующие операции.

1. Две обобщенные функции f_1 и f_2 называются *равными,* если значения соответствующих функционалов совпадают на каждой основной функции, т. е.

$$(f_1=f_2)\Leftrightarrow(f_1,\ \varphi)=(f_2,\ \varphi),\ \forall\varphi\in D.$$

Обобщенные функции f_1 и f_2 считаются *различными,* если существует хотя бы одна функция $\varphi_0\in D$, для которой $(f_1,\ \varphi_0)\neq(f_2,\ \varphi_0)$.

Имеет место

Теорема 17.2. Пусть f_1 и f_2 — различные локально интегрируемые функции. Тогда существует функция $\varphi_0\in D$, такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x)\varphi_0(x)dx\neq\int_{-\infty}^{\infty}f_2(x)\varphi_0(x)dx.$$

Доказательство теоремы опускаем. Из теоремы следует, что *различным локально интегрируемым функциям соответствуют различные обобщенные функции.*

2. Произведение обобщенной функции f и непрерывной функции $\alpha(x)$ определяется равенством

$$(\alpha(x)f,\ \varphi)=(f,\ \alpha(x)\varphi),\ \forall\varphi\in D.$$

В частности, если $\alpha(x)=\alpha=\text{const}$, то $(\alpha f,\ \varphi)=\alpha(f,\ \varphi),\ \forall\varphi\in D.$

Пример 6. Пусть $\alpha(x)$ — непрерывная функция. Тогда, согласно равенству (17.83),

$$(\alpha\delta,\ \varphi)=(\delta,\ \alpha\varphi)=\alpha(0)\varphi(0)=\alpha(0)(\delta,\ \varphi),\ \forall\varphi\in D.$$

Итак, в обобщенном смысле $\alpha(x)\delta = \alpha(0)\delta$, т. е. выражение $\alpha(x)\delta$ пропорционально δ.

3. Сумма двух обобщенных функций f_1 и f_2 определяется соотношением $(f_1 + f_2,\ \varphi) = (f_1,\ \varphi) + (f_2,\ \varphi),\ \forall \varphi \in D$.

Дифференцирование обобщенных функций. В отличие от обычных функций, не всегда дифференцируемых, обобщенные функции бесконечно дифференцируемы (в обобщенном смысле).

Пусть f — дифференцируемая функция. Тогда для всех $\varphi \in D$

$$(f'(x),\ \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx =$$

$$= f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx.$$

Внеинтегральный член в правой части этого равенства в силу финитности функции $\varphi(x)$ равен нулю. Тогда

$$(f'(x),\ \varphi(x)) = (f',\ \varphi) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -(f,\ \varphi').$$

Определим *производную обобщенной функции* f *(обобщенную производную)* равенством

$$(f',\ \varphi) = -(f,\ \varphi'),\ \forall \varphi \in D. \tag{17.87}$$

Покажем, что функционал f' является линейным. Действительно, для всех $\alpha,\ \beta \in \mathbf{R}$ и всех $\varphi_1,\ \varphi_2 \in D$

$$(f',\ \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = -(f,\ \alpha\varphi_1' + \beta\varphi_2') = -\alpha(f,\ \varphi_1') - \beta(f,\ \varphi_2') =$$
$$= \alpha(f',\ \varphi_1) + \beta(f',\ \varphi_2),$$

т. е. f' — линейный функционал.

В соответствии с равенством (17.87) вторая производная f'' обобщенной функции f определяется соотношением

$$(f'',\ \varphi) = -(f',\ \varphi') = (-1)^2(f,\ \varphi''),\ \forall \varphi \in D.$$

Аналогично для производной k-го порядка обобщенной функции можно записать:

$$(f^{(k)},\ \varphi) = (-1)^k(f,\ \varphi^{(k)}),\ \forall \varphi \in D. \tag{17.88}$$

Из равенства (17.88) следует, что обобщенная функция f имеет производную (*обобщенную*) *любого* k-го порядка.

Пример 7. Рассмотрим единичную функцию Хевисайда $1(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$ Она определяет регулярную обобщенную функцию

$$(1(x),\ \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} 1(x)\varphi(x)dx = \int_{0}^{\infty} \varphi(x)dx,\ \forall \varphi \in d.$$

Тогда производная этой функции

$$(1'(x),\ \varphi(x)) = -(1(x),\ \varphi'(x)) = -\int_{0}^{\infty} \varphi'(x)dx =$$

$$= -\varphi(x)|_{\delta}^{\infty} = \varphi(0) = (\delta(x),\ \varphi(x)),\ \forall\varphi \in D.$$

На основании равенства обобщенных функций заключаем, что в обобщенном смысле $1'(x) = \delta(x)$, т. е. *производная единичной функции Хевисайда равна* δ*-функции Дирака*.

Пример 8. Найти обобщенные производные δ-функции.

□ По определению и на основании равенства (17.83) имеем:

$$(\delta',\ \varphi) = -(\delta,\ \varphi') = -\varphi'(0),\ \forall\varphi \in D. \tag{17.89}$$

Аналогично можно получить равенство

$$(\delta^{(k)},\ \varphi) = (-1)^k\varphi^{(k)}(0),\ k = 0,\ 1,\ \ldots \tag{17.90}$$

Свойство (17.90) отражает так называемое *фильтрующее (выхватывающее) свойство* δ-функции.

Пример 9. Найти все производные функции $f(x) = |x|$.

□ По определению

$$(|x|',\ \varphi) = -(|x|,\ \varphi') = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|\varphi'(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} x\varphi'(x)dx - \int\limits_{0}^{\infty} x\varphi'(x)dx =$$

$$= x\varphi(x)|_{-\infty}^{0} - \int\limits_{-\infty}^{0} \varphi(x)dx - x\varphi(x)|_{0}^{\infty} + \int\limits_{0}^{\infty} \varphi(x)dx,\ \forall\varphi \in D.$$

В силу финитности функции $\varphi(x)$ внеинтегральные члены в правой части этого равенства равны нулю. Поэтому

$$(|x|',\ \varphi) = -\int\limits_{-\infty}^{0} \varphi(x)dx + \int\limits_{0}^{\infty} \varphi(x)dx = 2\int\limits_{0}^{\infty} \varphi(x)dx - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx =$$

$$= 2(1(x),\ \varphi - (1,\ \varphi) = (2\cdot 1(x) - 1,\ \varphi),\ \forall\varphi \in D.$$

Отсюда в обобщенном смысле $|x|' = 2\cdot 1(x) - 1 = \operatorname{sign} x$. Далее, так как $1'(x) = \delta(x)$, то $|x|'' = 2\delta(x)$ и, значит, $|x|^{(k)} = 2\delta^{(k-2)}(x)$, $k = 2,\ 3,\ \ldots$

Таким образом, в обобщенном смысле функция $|x|$ бесконечно дифференцируема в любой точке x. В обычном же смысле, как известно, она не дифференцируема в точке $x = 0$.

Пример 10. Используя операцию умножения обобщенной функции δ' на дифференцируемую функцию $\alpha(x)$, на основании формулы (17.90) получаем

$$(\alpha\delta',\ \varphi) = (\delta',\ \alpha\varphi) = -(\delta,\ (\alpha\varphi)') = -(\delta,\ \alpha\varphi' + \alpha'\varphi) =$$
$$= -\alpha(0)\varphi'(0) - \alpha'(0)\varphi(0) = \alpha(0)(\delta',\ \varphi) - \alpha'(0)(\delta,\ \varphi) =$$
$$= (\alpha(0)\delta',\ \varphi) - (\alpha'(0)\delta,\ \varphi) = (\alpha(0)\delta' - \alpha'(0)\delta,\ \varphi),\ \forall\varphi \in D,$$

т. е.

$$\alpha\delta' = \alpha(0)\delta' - \alpha'(0)\delta. \tag{17.91}$$

В частности, если $\alpha(x) = x$, то по формуле (17.91) $x\delta'(x) = 0\cdot\delta' - 1\cdot\delta(x)$, т. е. $x\delta'(x) = -\delta(x)$.

Аналогично, если $\alpha(x) = x^k$, $k = 2,\ 3,\ \ldots$, то

$$x^k\delta'(x) = -kx^{k-1}|_{x=0}\delta(x) = 0.$$

Найдем теперь *производную произведения обобщенной функции и дифференцируемой функции* α.

По определению производной

$$((\alpha f)',\ \varphi) = -(\alpha f,\ \varphi') = -(f,\ \alpha\varphi') = -(f,\ \alpha\varphi') -$$
$$-(f,\ \alpha'\varphi) + (f,\ \alpha'\varphi) = -(f,\ \alpha\varphi' + \alpha'\varphi) + (f,\ \alpha'\varphi) =$$
$$= -(f,\ (\alpha\varphi)') + (\alpha' f,\ \varphi) = (f',\ \alpha\varphi) + (\alpha' f,\ \varphi) =$$
$$= (\alpha f',\ \varphi) + (\alpha' f,\ \varphi) = (\alpha f' + \alpha' f,\ \varphi),\ \forall\varphi \in D.$$

Таким образом,

$$(\alpha f)' = \alpha' f + \alpha f'. \tag{17.92}$$

Пример 11. С учетом равенств (17.92) и (17.91) имеем

$$(\sin x \cdot \delta(x))' = \cos x \cdot \delta(x) + \sin x \cdot \delta'(x) = \\ = \cos 0 \cdot \delta(x) + \sin(0) \cdot \delta'(x) - \cos(0) \cdot \delta(x) = 0.$$

Аналогично

$$(e^{-x}\delta(x))' = -e^{-x}\delta(x) + e^{-x}\delta'(x) = -\delta(x) + \delta'(x) + \delta(x) = \delta'(x).$$

Дифференцирование кусочно-непрерывных функций. Имеет место ***Теорема 17.3.*** Пусть функция $f(x)$ в точках x_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, имеет разрывы первого рода со скачками $\sigma_k = f(x_k + 0) - f(x_k - 0)$ и обычную производную $\frac{df(x)}{dx}$, непрерывную всюду, кроме точек x_k. Тогда обобщенная производная f' определяется равенством

$$f' = \frac{df(x)}{dx} + \sum_{k=1}^{N} \sigma_k \delta(x - x_k). \tag{17.93}$$

□ Для простоты рассуждений рассмотрим случай одного разрыва первого рода функции f в точке x_0 со скачком $\sigma_0 = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ (рис. 17.6).

По определению

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = \\ = -\int_{-\infty}^{x_0} f(x)\varphi'(x)dx - \int_{x_0}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = \\ = -f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{x_0} + \\ \int_{-\infty}^{x_0} \frac{df(x)}{dx}\varphi(x)dx - f(x)\varphi(x)\Big|_{x_0}^{\infty} + \\ + \int_{x_0}^{\infty} \frac{df(x)}{dx}\varphi(x)dx.$$

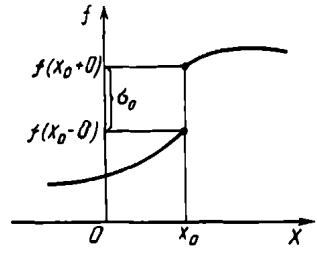


Рис. 17.6

В силу финитности функции φ внеинтегральные члены в правой части этого равенства равны нулю при $x = \pm\infty$. Поэтому

$$(f', \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(x)}{dx}\varphi(x)dx - f(x_0 - 0)\varphi(x_0) + f(x_0 + 0)\varphi(x_0) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(x)}{dx}\varphi(x)dx + \varphi(x_0)(f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)) = \\ = \left(\frac{df}{dx}, \varphi\right) + \varphi(x_0)\sigma_0 = \left(\frac{df}{dx}, \varphi\right) + (\sigma_0\delta(x - x_0), \varphi) = \\ = \left(\frac{df}{dx} + \sigma_0\delta(x - x_0), \varphi\right), \quad \forall \varphi \in D.$$

Отсюда на основании равенства обобщенных функций получаем

$$f' = \frac{df}{dx} + \sigma_0\delta(x - x_0). \blacksquare \qquad (17.94)$$

Следствие Если функции f, f', ..., $f^{(n-1)}$ имеют разрывы первого рода в точке x_0 со скачками σ_0^0, σ_0', ..., $\sigma_0^{(n-1)}$ соответственно, то

$$f' = \frac{df}{dx} + \sigma_0^0\delta(x - x_0);$$

$$f'' = \frac{d^2f}{dx^2} + \sigma_0^0\delta'(x - x_0) + \sigma_0'\delta(x - x_0);$$

$$f''' = \frac{d^3f}{dx^3} + \sigma_0^0\delta''(x - x_0) + \sigma_0'\delta'(x - x_0) + \sigma_0''\delta(x - x_0);$$

.....

$$f^{(n)} = \frac{d^nf}{dx^n} + \sigma_0{}^0\delta^{(n-1)}(x - x_0) + \sigma_0'\delta^{(n-2)}(x - x_0) + \ldots$$
$$+ \sigma_0^{(n-1)}\delta(x - x_0) = \frac{d^nf}{dx^n} + \sum_{k=0}^{n-1}\sigma_0^{(k)}\delta^{(n-k-1)}(x - x_0). \qquad (17.95)$$

Докажем формулу (17.95) по индукции. При $n = 1$ из формулы (17.95) получим равенство (17.94). Предположим теперь, что при $n = p$ имеет место равенство $f^{(p)} = \frac{d^pf}{dx^p} + \sum_{k=0}^{p-1}\sigma_0^{(k)}\delta^{(p-k-1)}(x - x_0)$.

Тогда

$$f^{(p+1)} = (f^{(p)})' = \left(\frac{d^pf}{dx^p} + \sum_{k=0}^{p-1}\sigma_0^{(k)}\delta^{(p-k-1)}(x - x_0)\right)' =$$

$$= \frac{d^{p+1}f}{dx^{p+1}} + \sigma_0^{(p)}\delta(x - x_0) + \sum_{k=0}^{p-1}\delta_0^{(k)}\delta^{(p-k)}(x - x_0) =$$

$$= \frac{d^{p+1}f}{dx^{p+1}} + \sum_{k=0}^{p}\sigma_0^{(k)}\delta^{(p-k)}(x - x_0).$$

Таким образом, n-я производная в обобщенном смысле равна сумме n-й производной в обычном смысле и сумме произведений скачков функции f, f', ..., $f^{(n-1)}$ на соответствующие производные δ-функции Дирака, сосредоточенные в точке разрыва $x = x_0$. В частности, если f — гладкая в точке x_0 функция, то в этом случае ее обобщенные производные совпадают с производными в обычном классическом смысле, т. е. $f^{(n)} = \frac{d^nf}{dx^n}$

Пример 12. Рассмотрим так называемую *характеристическую функцию* отрезка $[-a, a]$ (рис. 17.7):

$$h(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant a; \\ 0, & |x| > a > 0. \end{cases}$$

По формуле (17.94) получаем

$$h' = \frac{dh}{dx} + \sigma_1\delta(x+a) + \sigma_2\delta(x-a) = 0 + \delta(x+a) - \delta(x-a).$$

Итак, $h'(x) = \delta(x+a) - \delta(x-a)$.

Сходимость обобщенных функций. Последовательность (f_n) обобщенных функций называется сходящейся при $n \to \infty$ к обобщенной функции f, если

$$\lim_{n\to\infty} (f_n,\ \varphi) = (f,\ \varphi),\ \forall\varphi \in D. \tag{17.96}$$

Покажем, что сходящуюся последовательность обобщенных функций можно почленно дифференцировать любое число раз, т. е.

$$(\lim_{n\to\infty} f_n = f) \Rightarrow (\lim_{n\to\infty} f_n^{(k)} = f^k,\ k = 1,\ 2,\ \ldots) \tag{17.97}$$

в смысле теории обобщенных функций.

Действительно, согласно равенству (17.96) и определению производной обобщенной функции, получаем

$$\lim_{n\to\infty} (f_n',\ \varphi) = -\lim_{n\to\infty} (f_n,\ \varphi') = -(\lim_{n\to\infty} f_n,\ \varphi') =$$
$$= -(f,\ \varphi') = (f',\ \varphi),\ \forall\varphi \in D.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n' = f'$.

Аналогично доказывается равенство (17.97) при любом k.

δ-образные последовательности. Последовательность функций f_n, пределом которой служит δ-функция, называется *δ-образной последовательностью.*

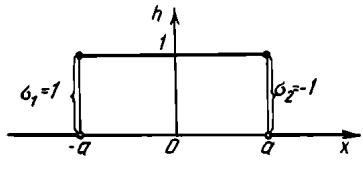


Рис. 17.7

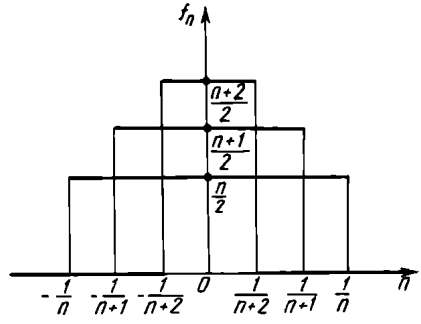


Рис. 17.8

Пример 13. Рассмотрим последовательность функций

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & |x| < \frac{1}{n}; \\ 0, & |x| > \frac{1}{n}, \end{cases} \quad n = 1,\ 2,\ \ldots, \tag{17.98}$$

графики которых изображены на рис. 17.8.

Для любой функции $\varphi \in D$ с учетом теоремы Лагранжа о среднем имеем

$$(f_n,\ \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\varphi(x)dx = \frac{n}{2}\int_{-1/n}^{1/n} \varphi(x)dx = \frac{n}{2}\varphi(\xi_n)\frac{2}{n} = \varphi(\xi_n),$$

где $-1/n < \xi_n < 1/n$. Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}(f_n, \varphi) = \lim_{n\to\infty}\varphi(\xi_n) = \varphi(0) = (\delta, \varphi), \ \forall \varphi \in D,$$

т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \delta$. Значит, последовательность (17.98) — δ-образная.

Пример 14. Рассмотрим равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin nx}{x}\varphi(x)dx = \pi\varphi(0),$$

полученное в теории рядом Фурье (см. формулу (10.84), ч. III). Из него и соотношения $\varphi(0) = (\delta, \varphi)$ получим, что последовательность функций $f_n(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin nx}{x}$ при $n\to\infty$ сходится к δ-функции, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin nx}{\pi x} = \delta(x). \tag{17.99}$$

Пример 15. Рассмотрим последовательность

$$f_n(x) = \int_{-n}^{n} e^{i\omega x}d\omega, \ n \in \mathbf{N}.$$

Так как

$$\int_{-n}^{n} e^{i\omega x}d\omega = \frac{e^{ix\omega}}{ix}\Big|_{\omega=-n}^{\omega=n} = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{ix} = 2\frac{\sin nx}{x},$$

то, согласно равенству (17.99),

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} e^{i\omega x}d\omega = \lim_{n\to\infty} 2\frac{\sin nx}{x} = 2\pi\delta(x).$$

Таким образом, получаем равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}d\omega = \delta(x). \tag{17.100}$$

Пример 16. Нетрудно показать, что последовательность функций

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1/n; \\ n(1+nx), & -1/n \leqslant x \leqslant 0; \\ n(1-nx), & 0 \leqslant x \leqslant 1/n, \end{cases}$$

графики которых изображены на рис. 17.9, является δ-образной (предоставляем в этом убедиться читателям самостоятельно).

Преобразование Фурье обобщенных функций. Преобразование Фурье $\mathbf{F}\{f\}$ обобщенной функции f определяется равенством

$$(\mathbf{F}\{f\}, \varphi) = (f, \mathbf{F}\{\varphi\}), \ \forall \varphi \in D. \tag{17.101}$$

Говорят, что обобщенная функция f равна нулю на открытом множестве E, если $(f, \varphi) = 0$ для всякой функции $\varphi \in D$, носитель которой расположен в E. *Носителем обобщенной функции* f называется наименьшее замкнутое множество, вне которого f равна нулю.

Имеет место

Теорема 17.4. Если f — обобщенная функция с ограниченным носителем, то ее преобразование Фурье имеет вид

$$\mathbf{F}\{f\} = (f, e^{-i\omega x}). \tag{17.102}$$

□ Согласно определению (17.101) и формуле преобразования Фурье (10.107), ч. III, имеем

$$(\mathbf{F}\{f\},\ \varphi) = (f,\ \mathbf{F}\{\varphi\}) = (f,\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) e^{-i\omega x}\, d\omega) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} (f,\ \varphi(\omega) e^{-i\omega x}) d\omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\varphi(\omega) f,\ e^{-i\omega x}) d\omega =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} (f,\ e^{-i\omega x}) \varphi(\omega) d\omega = ((f,\ e^{-i\omega x}),\ \varphi(\omega)).$$

Отсюда и следует равенство (17.102). ■

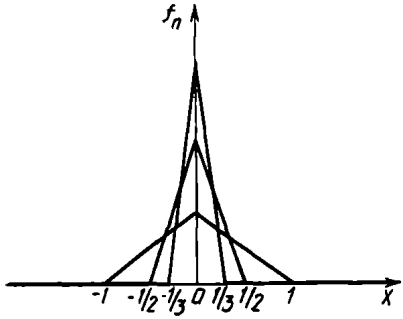


Рис. 17.9

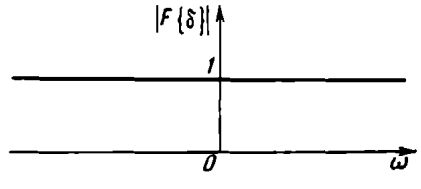


Рис. 17.10

Пример 17. Найти преобразование Фурье δ-функции и ее производных.
□ По формуле (17.102)

$$\mathbf{F}\{\delta(x)\} = (\delta,\ e^{-i\omega x}) = e^{-i\omega x}|_{x=0} = 1.$$

Таким образом, δ-функция имеет постоянный спектр $|\mathbf{F}\{\delta\}|$ бесконечной протяженности (рис. 17.10).
Далее,

$$\mathbf{F}\{\delta'(x)\} = (\delta',\ e^{-i\omega x}) = i\omega e^{-i\omega x}|_{x=0} = i\omega.$$

Аналогично получим

$$\mathbf{F}\{\delta^{(k)}(x)\} = (i\omega)^k,\ k = 0,\ 1,\ \ldots \qquad (17.103)$$

Пример 18. Найти Фурье-преобразование функций: а) $\delta(x - x_0)$; б) $e^{i\omega_0 x}$; в) 1.
□ а) По формуле (17.102)

$$\mathbf{F}\{\delta(x - x_0)\} = (\delta(x - x_0),\ e^{-i\omega x}) = e^{-i\omega x}|_{x=x_0} = e^{-i\omega x_0}.$$

б) Согласно формуле (17.100),

$$\mathbf{F}\{e^{i\omega_0 x}\} = (e^{i\omega_0 x},\ e^{-i\omega x}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \omega_0)x} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0).$$

в) Аналогично

$$\mathbf{F}\{1\} = (1,\ e^{-i\omega x}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} dx = |\ \omega = -t\ | = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dt = 2\pi\delta(x).$$

Итак,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dt = 2\pi\delta(x). \qquad (17.104)$$

Заметим, что для функций $f_1 = e^{j\omega_0 x}$ и $f_2 = 1$ преобразование Фурье (в обычном смысле) не существует, так эти функции не являются абсолютно интегрируемыми на $\mathbf{R}$.

Свертка обобщенных функций. Сверткой двух обычных функций f и g, определенных для всех $x \in \mathbf{R}$, называется новая функция

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\tau)g(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau)d\tau. \qquad (17.105)$$

Перенесем это определение свертки на обобщенные функции. Пусть f и g — обычные функции. Рассмотрим функционал $f * g$. Согласно равенству (17.105),

$$(f * g,\ \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau)d\tau\}\varphi(x)dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\{\int_{-\infty}^{\infty} g(x-\tau)\varphi(x)dx\}d\tau.$$

Введя замену $x - \tau = y$, после несложных преобразований получим

$$(f * g,\ \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\{\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\varphi(\tau+y)dy\}d\tau =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\{\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\varphi(x+y)dy\}dx. \qquad (17.106)$$

Равенство (17.106) делает естественным следующее определение свертки обобщенных функций: сверткой двух обобщенных функций f и g называется функционал, определяемый соотношением

$$(f * g,\ \varphi) = (f(x),\ (g(y),\ \varphi(x+y))) =$$
$$= (g(y),\ (f(x),\ \varphi(x+y))),\ \forall \varphi \in D. \qquad (17.107)$$

Пример 19. Найти свертку обобщенной функции f и δ-функции.
□ По формуле (17.107)

$$(\delta * f,\ \varphi) = (f(x),\ (\delta(y),\ \varphi(x+y))) = (f(x),\ \varphi(x+y)|_{y=0}) = (f,\ \varphi),$$

т. е. $\delta * f = f$.
Таким образом, в операции свертки δ-функция играет роль единицы.
Последнюю формулу часто записывают в виде

$$(\delta * f = f * \delta) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)f(x-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(x-\tau)d\tau = f(x). \qquad (17.108)$$

Пример 20. Найти свертку обобщенной функции f и производных δ-функции.
□ По определению

$$(\delta' * f,\ \varphi) = (f(x),\ (\delta'(y),\ \varphi(x+y))) = (f(x),\ -(\delta(y),\ \varphi'(x+y))) =$$
$$= -(f(x),\ \varphi'(x+y)|_{y=0} = -(f(x),\ \varphi'(x)) = (f',\ \varphi),$$

т. е. $\delta' * f = f'$.
Аналогично показывается, что

$$\delta^{(k)} * f = f^{(k)},\ k = 0,\ 1,\ \ldots \qquad (17.109)$$

Формулу (17.109) можно записать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta^{(k)}(x-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\tau)\delta^{k}(\tau)d\tau = f^{(k)}(x),\ k = 0,\ 1,\ \ldots \qquad (17.110)$$

Задачи и упражнения

1. Доказать, что $\left(\frac{d}{dx}+\lambda\right)1(x)e^{-\lambda x}=\delta(x)$.

2. Доказать, что

$$\alpha(x)\delta^{(k)}(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \alpha^{(k)}(0)\delta^{(n-k)}(x),$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция.

3. Показать, что в обобщенном смысле

$$(\ln|x|)'=V.\ p.(1/x),$$

где $V.\ p.\left(\frac{1}{x}\right)$ означает, что интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx$ понимается в смысле главного значения ($\varphi(x)$ — финитная функция).

4. Найти f' и f'' для функции $f(x)=x\cdot 1(x)-(x-1)\cdot 1(x-1)+1(x-1)$.

5. Доказать, что последовательности $f_n(x)$ являются δ-образными:

а) $f_n(x)=\frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}$; б) $f_n(x)=\begin{cases}n, & 0\leqslant x\leqslant 1/n;\\ 0, & x<0,\ x>1/n.\end{cases}$

6. Найти $f''(x)$ для функций:

а) $f(x)=1(x)\cos x$; б) $f(x)=1(x)e^x$.

7. Найти преобразование Фурье функций:

а) $\cos\omega_0 x$; б) $\sin\omega_0 x$; в) $f=\begin{cases}-1/2, & x<0;\\ 1/2, & x>0.\end{cases}$

8. Доказать равенства:

а) $\delta(x-\alpha)*\delta(x-\beta)=\delta(x-\alpha-\beta)$; б) $1*\varphi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt$;

в) $(f*g)'=f*g=f*g'$.

9. Найти свертку функций $f_\alpha(x)$ и $f_\beta(x)$, где

$$f_\alpha(x)=1(x)\frac{x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}e^{\lambda x}=1(x)\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{\lambda x},\ \alpha>0.$$

Указание. При вычислении свертки ввести замену $\tau=xu$.

18. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

18.1. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Понятие комбинаторики. В теории вероятностей одной из важнейших является задача о подсчете числа способов, с помощью которых может осуществиться некоторое событие, или числа способов, которыми можно упорядочить данную совокупность объектов. Поскольку в таких задачах речь идет о тех или иных комбинациях объектов, то их называют *комбинаторными*. Раздел математики, в котором изучаются эти задачи, называется *комбинаторикой*.

Для комбинаторных задач справедлив *основной принцип перечисления:* если множество E_1 содержит n_1 элементов, множество $E_2 - n_2$ элементов, ..., множество $E_m - n_m$ элементов, то число способов выбора по одному элементу из каждого множества равно $n_1 n_2 \cdots n_m$.

Перестановки. *Перестановкой* P_n из n элементов называется расположение этих элементов в определенном порядке. Так, например, из букв a, b, c можно составить следующие перестановки: (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).

В теореме 1.16, ч. I, доказано, что число перестановок из n элементов равно $n!$:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n. \tag{18.1}$$

Пример 1. Сколькими способами группа из 6 человек может расположиться: а) в ряд; б) за круглым столом?

□ а) Искомое число способов равно числу перестановок из 6, т. е. $P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

б) Выберем произвольно одного человека, а оставшихся пятерых упорядочим относительно выбранного. Это возможно осуществить $5! = 120$ способами.

Размещения. Из множества n элементов можно составить различные упорядоченные множества по m элементов. Например, из букв a, b, c, d можно составить 12 упорядоченных множеств по две буквы:

$$(a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, c), (b, d), (c, a), (c, b), (c, d), (d, a), (d, b), (d, c). \tag{18.2}$$

Любой выбор m элементов, взятых в определенном порядке из n элементов, называется *размещением* из n элементов по m и обозначается A_n^m.

Справедлива формула

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{18.3}$$

Действительно, существует n способов выбора первого элемента, $n-1$ способов выбора второго элемента, ..., $n-(m-1)$ способов выбора m-го элемента. Тогда по основному принципу перечисления число размещений из n элементов по m равно произведению $n(n-1)\cdots(n-m+1)$. Умножив и разделив это произведение на $(n-m)!$, получим формулу (18.3).

Пример 2. Сколькими способами можно распределить первую, вторую и третью премии на конкурсе, в котором принимает участие 20 человек?

□ Искомое число способов есть $A_{20}^3 = \dfrac{20!}{(20-3)!} = \dfrac{20!}{17!} = 20\cdot 19\cdot 18 = 6840.$

Сочетания. Одной из задач комбинаторики является подсчет числа множеств из m элементов, взятых из n элементов. Любой выбор из n элементов по m без учета порядка выбора называется *сочетанием* из n элементов по m и обозначается C_n^m. Отметим, что при подсчете числа сочетаний из n элементов по m порядок расположения выбранных m элементов несуществен. Так, например, в наборе пар букв (18.2) выборки типа (a, c) и (c, a), (b, a) и (a, b) в сочетаниях неразличимы.

Докажем, что

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \qquad (18.4)$$

В самом деле, существует A_n^m возможностей выбора m элементов из n. Так как порядок расположения выбранных m элементов в сочетаниях несуществен, то существует $m!$ перестановок, которые нельзя отличить от первоначально выбранной перестановки. Поэтому число таких сочетаний из n элементов по m равно числу размещений из n по m, деленному на $m!$ перестановок, т. е. имеет место формула (18.4).

Пример 3. Сколькими способами можно выбрать 5 радиоламп из партии, содержащей 15 ламп?

□ Искомое число способов

$$C_{15}^5 = \frac{15!}{5!\cdot 10!} = \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 3003.$$

Более общей является задача подсчета числа способов разбиения множества из n элементов на фиксированное число k групп, причем число элементов в каждой группе тоже фиксировано. Пусть в i-й группе содержится n_i элементов, $i=1, 2, \ldots, k$; $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$. Сколькими способами можно осуществить такое разбиение? Например, сколькими способами можно из 9 человек образовать три комиссии соответственно по четыре, три и два человека в каждой?

Покажем, что если множество E содержит n элементов и n_1, n_2, ..., n_k — целые положительные числа, причем $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$, то существует

$$N = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} = C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \cdots C_{n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-2}}^{n_{k-1}} \qquad (18.5)$$

различных разбиений множества E на k подмножеств $E_1, E_2, \ldots, E_k$, содержащих $n_1, n_2, \ldots, n_k$ элементов соответственно.

Действительно, сначала образуем группу из n_1 элементов. Это можно сделать $C_n^{n_1}$ способами. Из оставшихся $n-n_1$ элементов образуем группу из n_2 элементов. Это можно сделать $C_{n-n_1}^{n_2}$ способами. Процесс продолжается до тех пор, пока не выбраны все подмножества. Тогда общий результат (18.5) следует из основного принципа перечисления.

Решим теперь сформулированную выше задачу. Здесь $n_1=4$, $n_2=3$, $n_3=2$. Тогда по формуле (18.5) искомое число способов образования комиссий $N=\dfrac{9!}{4!\,3!\,2!}=1260$.

Пример 4. Курс охватывает 10 разделов теории вероятностей и 8 разделов других дисциплин. Экзаменационный билет по курсу состоит из 5 вопросов: три — по теории вероятностей и два — по другим дисциплинам. Сколькими способами можно составить экзаменационные билеты?

□ Три вопроса по теории вероятностей из 10 разделов можно выбрать C_{10}^3 способами, а два вопроса из 8 других разделов — C_8^2 способами. Согласно основному принципу перечисления, искомое число возможных экзаменационных билетов $C_{10}^3 C_8^2=3360$.

Задачи и упражнения

1. Доказать, что:

а) $C_n^m=C_n^{n-m}$; б) $n^2=C_n^2+C_{n+1}^2$;

в) $C_n^m C_m^r=C_n^r C_{n-r}^{m-r}$; г) $C_n^2+n=\dfrac{n(n+2)}{2}$.

2. Имеется шесть пар перчаток разных размеров. Сколькими способами можно выбрать из них одну перчатку на левую руку и одну на правую так, чтобы эти перчатки были разных размеров?

3. Сколькими способами можно составить флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал пяти цветов?

4. Сколькими способами можно разделить группу численностью 20 человек на одну группу, состоящую из 10, и две группы из 5 человек?

18.2. ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ

Пространство элементарных событий. Теория вероятностей — раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений. В ее основе лежат определения ряда основных понятий, таких, например, как «собитие», «вероятность», «случайная величина», а также исходная система аксиом.

Под *опытом*, или *экспериментом*, или *испытанием* будем понимать осуществление конкретного комплекса условий. Опыт называется *случайным*, если его результат нельзя точно предсказать до его осуществления. Например, пусть опыт заключается в подбрасывании монеты. Результат его — выпадение герба (Г) или решетка (Р) — нельзя предсказать заранее. Точно так же при стрельбе по мишени нельзя заранее (до выстрела) предсказать, будет ли точное попадание в цель или промах. Аналогично при заполнении билета «Спортлото» невозможно заранее предсказать величину выигрыша.

Всякий результат опыта или наблюдения называется *событием*. В рассмотренных выше примерах случайных экспериментов событиями являются: выпадение герба или решетки, попадание в цель или промах, выигрыш в «Спортлото» определенной суммы. Событие называется *случайным*, если в результате опыта оно может произойти, а может и не произойти. Все перечисленные выше события — случайные. Событие называется *достоверным*, если оно обязательно произойдет в условиях данного опыта. Например, выбор одной годной детали из партии n годных деталей есть событие достоверное. *Невозможным* называется событие, которое в условиях данного опыта не может произойти. Например, невозможно поразить одну и ту же мишень три раза при двух выстрелах.

Различают элементарные и составные события. События, которые невозможно разложить на более простые, называются *элементарными*. Все остальные события называются *составными* или *разложимыми*. Например, пусть событие состоит в том, что сумма очков, выпавших при бросании двух игральных костей, равна шести. Это событие состоит из пяти возможных элементарных событий — выпадения на гранях костей следующих пар цифр: (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1) соответственно. Далее, пусть опыт заключается в определении x — возраста человека при переписи населения. Каждое конкретное значение x — элементарное событие. Событие, заключающееся в определении возраста $x > 25$ лет,— составное.

Итак, каждое составное событие представляется суммой элементарных событий. Множество всех элементарных событий в условиях данного эксперимента называется *пространством элементарных событий* и обозначается Ω, а сами элементарные события (исходы опыта) — точками ω этого пространства. Событием является любое подмножество A пространства Ω элементарных событий. Будем говорить, что событие A произошло, если исход опыта ω принадлежит A.

Пример 1. При подбрасывании двух игральных костей пространством Ω является множество 36 пар цифр (1,1), (1,2), ..., (2,1), (2,2), ..., (6,5), (6,6). Точкой ω (элементарным событием этого пространства) является любая такая пара цифр. Подмножество $A = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$ этого пространства — событие, заключающееся в выпадении шести очков в сумме на двух гранях. Таким образом, событие A произошло, если при подбрасывании двух костей сумма выпавших цифр равна шести.

Пример 2. Пусть в партии из ста деталей возможны бракованные. Наудачу из них выбирается деталь и проверяется на годность. Среди этих деталей бракованных может быть 0, 1, 2, ..., 100. Все это — элементарные события, образующие пространство элементарных событий, состоящее из 101 точки.

Пример 3. Бросается монета до выпадения герба (Г). Элементарными событиями при этом являются следующие: Г, РГ, РРГ, РРРГ, ..., т. е. пространство Ω элементарных событий в данном случае состоит из бесконечного, но счетного множества элементарных событий.

Пример 4. Продолжительность работы радиоприемника является элементарным событием, а пространством элементарных событий в этом случае служит временной полуинтервал $[0, +\infty)$.

События называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление других событий в условиях одного и того же опыта. Например, пусть из урны, в которой находятся белые,

голубые и красные шары, извлекается один шар. Тогда извлечение красного шара исключает появление голубого или белого.

Событие $\overline{A}$, которое обязательно произойдет, если не произойдет событие A, называется *противоположным* событию A. Например, выигрыш и проигрыш в лотерее — противоположные события.

Говорят, что несколько событий в условиях данного опыта образуют *полную группу событий*, если в результате опыта обязательно произойдет хотя бы одно из них. Например, события «извлечение белого шара», «извлечение красного шара», «извлечение голубого шара» образуют полную группу событий в опыте извлечения шара из урны, в которой находятся белые, красные и голубые шары.

Алгебра событий. Пусть Ω — пространство элементарных событий. Тогда всякое множество A точек из Ω есть событие. Невозможное событие в пространстве Ω не имеет точек в Ω и обозначается $\varnothing$. Так как достоверное событие является совокупностью всех элементарных событий из Ω, то оно совпадает с пространством Ω и также обозначается Ω. Противоположное событию A событие $\overline{A}$ состоит из точек $\omega \in \Omega$, не принадлежащих A, т. е. $\overline{A}$ является дополнением к A в Ω. Иными словами, $\overline{A} = A^c = \Omega \backslash A$.

Говорят, что событие A влечет событие B, и пишут $A \subset B$, если A — часть подмножества B. События A и B называются *эквивалентными*, если $A \subset B$ и $B \subset A$.

Суммой или *объединением* событий A и B называется событие $A \cup B$, состоящее из всех исходов, составляющих A и B. Другими словами, сумма двух событий есть событие, состоящее в том, что произошло событие A или B. Если события A и B несовместны, их сумма обозначается $A + B$.

Пример 5. Пусть A и B обозначают выпадение при бросании игральной кости соответственно нечетного числа очков и числа очков, кратного трем. Тогда $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{3,6\}$ и, значит, $A \cup B = \{1, 3, 5, 6\}$.

Пересечением или *произведением* двух событий A и B называется событие $A \cap B$, состоящее из всех исходов, принадлежащих одновременно и A и B. В рассмотренном выше примере таким событием является $A \cap B = \{3\}$, т. е. выпадение «тройки». Часто пересечение событий A и B обозначается AB.

Если A и B — несовместные события (не имеют общих исходов), то $A \cap B = \varnothing$ — невозможное событие.

Событие, состоящее в том, что событие A происходит, а событие B не происходит, называется *разностью* событий A и B и обозначается $A \backslash B$. Другими словами, $A \backslash B = A \cap B$.

Введенные операции над событиями подчинены правилам операций над множествами (см. § 11, ч. I). Приведем таблицу операций над событиями.

1. $A \cup A = A$;
2. $A \cap A = A$;
3. $A \cup B = B \cup A$;
4. $A \cap B = B \cap A$;
5. $A \cup \Omega = \Omega$;
6. $A \cup \varnothing = A$;
7. $A \cap \Omega = A$;
8. $A \cap \varnothing = \varnothing$;

9. $\bar{\bar{A}} = A$; 10. $\overline{\Omega} = \varnothing$, $\overline{\varnothing} = \Omega$;
11. $A \cup \bar{A} = \Omega$; 12. $A \cap \bar{A} = \varnothing$;
13. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$; 14. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
15. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; 16. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
17. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$; 18. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Правила 1—13 вытекают непосредственно из определений суммы и произведения достоверного, невозможного и противоположного событий. Справедливость формул 14—18 нетрудно доказать. Покажем это на примере равенства 17: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, которое называется *формулой дополнения*.

В самом деле, событие $\overline{A \cup B}$ состоит в том, что не происходит событие $A \cup B$. Отсюда следует, что не происходит ни A, ни B. А это означает, что события и $\bar{A}$ и $\bar{B}$ происходят одновременно, т. е. происходит $\bar{A} \cap \bar{B}$. Таким образом, событие $\overline{A \cup B}$ влечет $\bar{A} \cap \bar{B}$: $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$.

С другой стороны, если происходит событие $\bar{A} \cap \bar{B}$, то не происходит ни A, ни B и, следовательно, не происходит событие $A \cup B$. В таком случае происходит событие $\overline{A \cup B}$. Следовательно, событие $\bar{A} \cap \bar{B}$ влечет $\overline{A \cup B}$, т. е. $\bar{A} \cap \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Итак, $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ и $\bar{A} \cap \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$, откуда $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

Вероятность события. Для качественного сравнения событий по степени возможности их появления вводится определенная мера, которая называется *вероятностью события*. Цель теории вероятностей — вычисление вероятностей событий, их комбинаций и изучение свойств вероятностей. Математическая модель опыта включает: 1) описание возможных исходов; 2) описание событий; 3) определение вероятностей наступления этих событий.

При построении вероятностной модели опыта нужно точно определить пространство элементарных событий (исходов опыта) и класс всех событий, которые могут произойти в процессе эксперимента (опыта). Если пространство элементарных событий состоит из конечного или счетного числа элементарных событий, оно называется *дискретным*.

Рассмотрим дискретное пространство $\Omega = \{\omega_i\}$ событий. Каждому элементарному событию ω_i поставим в соответствие неотрицательное число $p(\omega_i)$, такое, что

$$\sum_i p(\omega_i) = 1, \tag{18.6}$$

где суммирование по i распространяется на все элементарные события из Ω. Число $p(\omega_i)$ называется *вероятностью элементарного события* ω_i.

Если $A \subset \Omega$ — произвольное событие, то *вероятностью события* A называется число

$$P(A) = \sum_i p(\omega_i), \tag{18.7}$$

где суммирование по i распространяется на все исходы, составляющие событие A.

Пусть Ω — пространство с конечным числом n исходов. Каждому элементарному событию ω_1, ω_2, ..., ω_n поставим в соответствие одинаковую вероятность $p(\omega_i)=1/n$. В результате получим *пространство с равновероятными исходами*. В этом пространстве вероятностью события A, согласно равенству (18.7), называется число

$$P(A)=m/n, \tag{18.8}$$

где m — число исходов, благоприятствующих появлению события A в опыте; n — общее число исходов.

Определение вероятности (18.8) называется *классическим*. Часто число m/n называют *относительной частотой* появления события A в опыте. При *статистическом* определении вероятности предполагается, что частоты m/n при неограниченном увеличении числа исходов n устойчиво колеблются возле некоторого числа p, называемого вероятностью события A, т. е. существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}(m/n)$, равный этой вероятности p.

Пример 6. В урне 10 лотерейных билетов, 4 из них выигрышные. Из урны наугад извлекаются 2 билета. Найти вероятность того, что: а) оба билета выигрышные; б) оба билета без выигрыша; в) один билет выигрышный, а другой — нет.

□ Пусть A — событие, состоящее в том, что оба билета выигрышные; B — оба билета без выигрыша; C — один билет выигрышный, а другой — нет.

а) Выбор двух билетов из десяти можно осуществить $n=C_{10}^2=45$ способами, а двух выигрышных билетов из четырех — $m=C_4^2=6$ способами. Тогда по формуле (18.8) $P(A)=6/45=2/15$.

б) Имеется $m=C_6^2=15$ возможностей выбора билетов без выигрыша. В таком случае вероятность $P(B)=15/45=1/3$.

в) Существует 4 возможности вытащить выигрышный билет и 6 возможностей — билет без выигрыша. Согласно основному принципу перечисления, имеется $m=6\cdot 4=24$ возможностей вытащить один билет с выигрышем, а другой — без выигрыша. Тогда по формуле (18.8) $P(C)=24/45=8/15$.

Пример 7. В партии из n изделий k изделий являются бракованными. Для контроля выбирается m изделий. Найти вероятность того, что из m изделий l окажутся бракованными.

□ Выбор m изделий из n можно осуществить C_n^m способами, а выбор l бракованных из k бракованных изделий — C_k^l способами. После выбора l бракованных изделий останется $m-l$ годных, находящихся среди $n-k$ изделий. Но из $n-k$ годных изделий выбрать $m-l$ годных можно C_{n-k}^{m-l} способами. По основному принципу перечисления число исходов, благоприятствующих выбору l бракованных изделий из m выбранных и $m-l$ годных изделий из $n-k$ годных, равно $C_k^l C_{n-k}^{m-l}$. Тогда искомая вероятность $p=\dfrac{C_k^l C_{n-k}^{m-l}}{C_n^m}$.

Свойства вероятности. Вероятность события обладает следующими свойствами.

1°. Для любого события A справедливо неравенство $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

2°. Вероятность невозможного события $\varnothing$ равна нулю, а вероятность достоверного события Ω — единице.

Свойства 1° и 2° следуют непосредственно из определения вероятности.

3°. Для любых событий A и B

$$(A\subset B)\Rightarrow P(A)\leqslant P(B). \tag{18.9}$$

□ Событие B включает все элементарные события ω_i, состав-

ляющие A, и, возможно, элементарные события, не входящие в A. Отсюда в силу неотрицательности вероятности $p(\omega_i)$ и формулы (18.7) и следует неравенство (18.9). ■

4°. Если события A и B *несовместны*, т. е. $A \cap B = \varnothing$, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \tag{18.10}$$

□ Событие $A + B$ состоит из элементарных исходов ω_i из A и ω_j из B, причем общих исходов события A и B не имеют. Тогда по формуле (18.7)

$$P(A + B) = \sum_i p(\omega_i) + \sum_j p(\omega_j) = P(A) + P(B). \blacksquare$$

5°. Для вероятности противоположного события $\bar{A}$ справедливо равенство

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \tag{18.11}$$

□ Действительно, $A + \bar{A} = \Omega$. Тогда, согласно свойствам 2° и 4°, $P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega) = 1$. Отсюда и следует равенство (18.11). ■

6°. Для произвольных событий A и B имеет место равенство

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{18.12}$$

□ Событие $A \cup B$ состоит из элементарных событий, составляющих A, и тех событий из B, которые в A не входят. Вероятность этого события есть $P(A \cup B)$. В сумму $P(A) + P(B)$ дважды включены вероятности элементарных событий, общих для A и B, поэтому из этой суммы нужно вычесть вероятность $P(A \cap B)$ общих элементарных событий. ■

7°. Если $A \subset B$, то

$$P(B \backslash A) = P(B) - P(A) \tag{18.13}$$

для любых событий A и B.

□ Так как $B = A + B \backslash A$ и $A \cap (B \backslash A) = \varnothing$, то $P(B) = P(A) + P(B \backslash A)$. Отсюда и получаем равенство (18.13). ■

8°. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_k$ — произвольные события. Тогда

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{k} \bar{A}_i\right), \tag{18.14}$$

где $\bar{A}_i$ — событие, противоположное A_i.

□ Согласно формуле дополнения $\overline{\bigcup_{i=1}^{k} A_i} = \bigcap_{i=1}^{k} \bar{A}_i$,

$$\Omega = \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cup \left(\overline{\bigcup_{i=1}^{k} A_i}\right) = \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{k} \bar{A}_i\right).$$

Отсюда $P(\Omega) = 1 = P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) + P\left(\bigcap_{i=1}^{k} \bar{A}_i\right)$, что равносильно равенству (18.14). ■

Приведем решения задач, иллюстрирующие свойства 1° — 8°.

Пример 8. В урне 20 шаров: 10 красных, 7 синих и 3 белых. Найти вероятность того, что извлеченный наугад шар — цветной.

□ Пусть A — событие, заключающееся в извлечении красного шара, B — синего. Так как эти события несовместны и $P(A) = 10/20 = 1/2$, а $P(B) = 7/20$, то по формуле (18.10) искомая вероятность P (синий или белый шар) $= 10/20 + 7/20 = 17/20$.

Пример 9. Вероятность того, что будет снег (событие A), равна 0,7, а того, что будет дождь (событие B),— 0,35. Определить вероятность плохой погоды, если вероятность дождя со снегом (событие $A \cap B$) равна 0,15.

□ События A и B совместны. Тогда, согласно формуле (18.12), вероятность P (дождь или снег) $= P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}7 + 0{,}35 - 0{,}15 = 0{,}9$.

Часто удобнее найти вероятность события A с помощью вероятности противоположного события $\bar{A}$ по формуле (18.11).

Пример 10. В ящике имеется n деталей, среди которых m стандартных. Найти вероятность того, что среди k наугад извлеченных деталей имеется хотя бы одна стандартная.

□ Пусть A — событие, состоящее в том, что среди извлеченных деталей имеется хотя бы одна стандартная. Тогда $\bar{A}$ означает, что среди извлеченных деталей нет ни одной стандартной. Найдем $P(\bar{A})$. Число способов извлечения k деталей из n равно C_n^k, а число способов извлечения k нестандартных деталей из m нестандартных деталей — C_{n-m}^k. Тогда $P(\bar{A}) = \dfrac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$, и по формуле (18.11) искомая вероятность

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}.$$

Геометрическая вероятность. Для вычисления вероятности появления события A в том случае, когда результат опыта определяется случайным положением точек в некоторой области, используется определение *геометрической вероятности*. При этом любые положения точек в этой области считаются равновероятными. Назовем *мерой области* ее длину, площадь, объем в одно-, двух- и трехмерном случае соответственно. Обозначим меру области S, а меру части ее — s. Пусть A — событие, состоящее в попадании точки в указанную часть области. Тогда искомая вероятность события A (геометрическая вероятность) определяется равенством

$$P(A) = s/S. \qquad (18.15)$$

Пример 11. На отрезке единичной длины случайным образом появляется точка. Найти вероятность того, что расстояния от точки до концов отрезка больше 1/8.

□ По условию задачи искомому событию удовлетворяют точки, появляющиеся на интервале (a, b) (рис. 18.1). Так как его длина $s = 1 - (1/8 + 1/8) = 1 - 1/4 = 3/4$, а длина всего отрезка $s = 1$, то искомая вероятность $P = s/S = 3/4$..

Пример 12. Два студента договорились о встрече в некоторый промежуток времени $[0, T]$, причем каждый из них приходит к месту встречи случайным образом и ждет другого не более τ минут. Найти вероятность встречи студентов.

Рис. 18.1

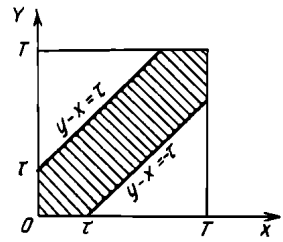


Рис. 18.2

□ Пусть x и y — моменты прихода студентов к месту встречи. Областью равновозможных значений x и y является квадрат площадью $S = T^2$ (рис. 18.2). Встреча произойдет, если $|x - y| \leqslant \tau$. Этому неравенству удовлетворяют точки (x, y) области, заключенной между прямыми $y - x = \tau$ и $y - x = -\tau$. Ее площадь $S = T^2 - (T - \tau)^2$. Тогда искомая вероятность $P = \frac{s}{S} = \frac{T^2 - (T-\tau)^2}{T^2} = 1 - \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^2$.

Аксиоматическое определение вероятности. Определение вероятности через интуитивное понятие частоты появления события едва ли подходит для строгого изложения теории вероятностей. Поэтому современная теория опирается на *аксиоматическое определение вероятности.*

Введем следующее определение. Пусть Ω — пространство элементарных событий. Система F подмножеств из Ω называется *алгеброй*, если выполнены следующие условия (аксиомы):

а) $\Omega \in F$;

б) $A \in F \Rightarrow \bar{A} = \Omega \backslash A \in F$, т. е. если A является событием, то и $\bar{A}$ тоже является событием;

в) $A \in F$, $B \in F \Rightarrow A \cup B \in F$, т. е. если A и B — события, то и их объединение также является событием.

Из условия «в» следует, что если A_1, A_2, ..., A_n (n — конечное число) — события, то и их объединение $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ является событием, т. е. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \in F$.

Класс множеств F называется σ-алгеброй, если он удовлетворяет условиям «а» и «б» определения алгебры и следующему условию: если A_1, A_2, ..., A_n, ... принадлежат F, то их объединение $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ тоже принадлежат F.

Из условий «а» и «б» при $A = \Omega$ следует, что $\bar{\Omega} = \varnothing \in F$, т. е. невозможное событие $\varnothing$ принадлежит F. Далее, согласно формуле дополнения и равенству $\bar{\bar{A}}_n = A$, получаем $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n = \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n}$, т. е. пересечение $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ бесконечного числа событий A_1, A_2, ..., A_n, ... принадлежит F, если события A_n принадлежат F. Для любых событий A и B из F справедливо соотношение $A \backslash B = A \cap \bar{B}$. Отсюда следует, что если события A и B принадлежат F, то разность $A \backslash B$ этих событий тоже принадлежит F.

Итак, если F — σ-алгебра подмножеств пространства Ω, то F содержит достоверное событие Ω, невозможное событие $\varnothing$, противоположное событие, разность двух любых событий, объединение и пересечение конечного или счетного числа принадлежащих F событий.

Пример 13. Пусть Ω — произвольное множество. Совокупность $F = \{\varnothing, \Omega\}$, состоящая из пустого множества $\varnothing$ и множества Ω, является алгеброй.

В самом деле, $\Omega \in F$, т. е. аксиома «а» выполнена. Далее, $\bar{\Omega} = \varnothing$ и $\bar{\varnothing} = \Omega$ т. е. дополнения множеств из F принадлежат F. Наконец, $\varnothing \cup \Omega = \Omega \in F$, т. е. аксиома «в» выполнена. Таким образом, система множеств $F = \{\varnothing, \Omega\}$ есть алгебра.

Пример 14. Пусть $\Omega = \{x_1, x_2, x_3\}$ — множество, состоящее из трех элементов x_1, x_2 и x_3. Система множеств

$$F = \{\varnothing,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ (x_1x_2),\ (x_1x_3),\ (x_2x_3),\ (x_1,\ x_2,\ x_3)\},$$

состоящая из $2^3 = 8$ множеств, как легко убедиться, является алгеброй.

Пример 15. Пусть Ω — множество действительных чисел $\mathbf{R}$. Класс всех промежутков числовой прямой вида $(-\infty, b)$, $[a, \infty)$, $(-\infty, \infty)$, $[a, b)$, $\forall\ a, b \in \mathbf{R}$, $a \leqslant b$, и бесконечных систем таких промежутков образует σ-алгебру. Она содержит пустые промежутки $[a, a)$, одноточечные множества, отрезки $[a, b]$, интервалы (a, b), полуинтервалы $[a, b)$, $(a, b]$. Например, $(a, b) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n},\ b\right)$, $[a, b] = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left[a,\ b + \frac{1}{n}\right)$.

Сформулируем *аксиоматическое определение вероятности*. Пусть Ω — пространство элементарных событий, а F — некоторая система подмножеств Ω, называемых событиями. Действительная функция P, ставящая каждому событию $A \in F$ в соответствие число $P(A)$, называется *вероятностной мерой*, а число $P(A)$ — *вероятностью события* A, если выполнены приведенные ниже условия (аксиомы вероятности).

1. $P(A) \geqslant 0$, $\forall A \in F$. 2. $P(\Omega) = 1$.

3. Для любой последовательности попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ выполняется соотношение

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Из аксиом 1—3 можно вывести основные свойства вероятности.

1°. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$.

В самом деле, $B = A \cup (B \cap \bar{A})$, причем события A и $B \cap \bar{A}$ несовместны. Тогда, согласно аксиоме 3, получаем $P(B) = P(A) + P(B \cap \bar{A})$. Отсюда на основании аксиомы 1 следует, что $P(A) \leqslant P(B)$, если $A \subset B$.

2°. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$, $\forall A \in F$.

Действительно, при $B = \Omega$ из доказанного свойства 1° и аксиом 1 и 2 получаем $0 \leqslant P(A) \leqslant P(\Omega) = 1$.

Исходя из аксиом 1—3 и свойств 1°—2° нетрудно убедиться, что аксиоматически определенная вероятность удовлетворяет свойствам 1°—8°, установленным для классически определенной вероятности.

Пусть Ω — пространство элементарных событий, $\mathbf{F}$ — множество событий пространства Ω, а P — вероятностная мера, определенная на F. Тогда тройка $\{\Omega, F, P\}$ называется *вероятностным пространством*.

Непрерывность вероятности. Бесконечная последовательность событий A_n, $n = 1, 2, \ldots$, называется монотонно убывающей, если $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \ldots$, и монотонно возрастающей, если $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \ldots$.

Возникает вопрос, какова вероятность осуществления всех событий для убывающей или возрастающей последовательности событий?

Рассмотрим убывающую последовательность событий (A_n). По условию осуществление всех событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ равнозначно

наступлению события $A_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$, т. е. $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = P(A_n)$. Так как, согласно свойству 1°, $(A_n \supset A_{n+1}) \Rightarrow (P(A_n) \geqslant P(A_{n+1}))$, то монотонная ограниченная снизу последовательность $(P(A_n))$ имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$. Вероятность обладает свойством непрерывности в том смысле, что для любой монотонно убывающей последовательности событий предел $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$ совпадает с вероятностью осуществления всех событий A_n, т. е. с вероятностью события $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$. Другими словами, имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} \bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

Для возрастающей последовательности событий $A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_n$. В этом случае непрерывность вероятности означает, что

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

Задачи и упражнения

1. Пусть Ω — пространство с конечным числом n исходов. Доказать (по индукции), что число всевозможных событий в этом пространстве равно 2^n.

2. В лотерее разыгрывается 1000 билетов. Среди них один выигрыш в размере 50 руб., 5 выигрышей по 20 руб., 20 выигрышей по 10 и 50 выигрышей по 5 руб. Найти вероятность: а) выигрыша не менее 10 руб.; б) какого-либо выигрыша.

3. В конверте среди 100 фотокарточек находится разыскиваемая карточка. Из конверта наугад берем 10 карточек. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная карточка.

4. На бесконечную шахматную доску, сторона каждой клетки которой равна $2a$, случайным образом бросают монету радиусом $r < a$. Найти вероятность попадания монеты целиком внутрь одной клетки.

5. Стрелок производит один выстрел в мишень, состоящую из центрального круга и двух концентрических колец. Вероятность попадания в круг и кольца — 0,20; 0,15 и 0,1 соответственно. Найти вероятность непопадания в мишень.

18.3. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Понятие условной вероятности. Вероятность события зависит от условий, при которых осуществляется опыт.

Пример 1. В семье два ребенка: а) Какова вероятность того, что оба ребенка — мальчики? б) Если известно, что один из детей — мальчик, то какова вероятность того, что оба ребенка — мальчики? в) Известно, что старший ребенок — мальчик. Какова вероятность того, что оба — мальчики?

□ Обозначим: $М$ — мальчик, $Д$ — девочка. Событие $ММ$ означает, что оба ребенка — мальчики, причем старший мальчик — второй.

а) Пространство элементарных событий $\Omega = \{ММ, МД, ДМ, ДД\}$ и, значит, $P(ММ) = 1/4$.

б) Элементарное событие $ДД$ исключается, поэтому $\Omega = \{ММ, МД, ДМ\}$, и тогда $P(ММ) = 1/3$.

в) Имеем $\Omega = \{ММ, ДМ\}$, т. е. $P(ММ) = 1/2$.

Этот пример показывает, что вероятность некоторого события существенно зависит от того, осуществились или нет некоторые условия.

Вероятность события A при условии, что событие B произошло, называется *условной вероятностью* события A и обозначается $P(A \mid B)$. Эта вероятность определяется равенством

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{18.16}$$

при условии, что $P(B) > 0$.

Обоснуем формулу (18.16) в случае пространства событий с конечным числом исходов.

Пусть общее число исходов равно n, событию A благоприятствует r исходов, событию B — m исходов, а совместному событию $A \cap B$ — k исходов. Тогда $P(B) = m/n$, $P(A \cap B) = k/n$. Условная вероятность $P(A \mid B)$ наступления события A при условии, что событие B произошло, должна вычисляться не по всем n исходам, а только по тем m исходам, в результате которых наступило событие B, т. е.

$$P(A \mid B) = \frac{k}{m} = \frac{k/n}{m/n} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Аналогично для условной вероятности $P(B \mid A)$ по формуле (18.16) имеем

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A) > 0. \tag{18.17}$$

Из равенств (18.16) и (18.17) получаем *формулу умножения вероятностей:*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B). \tag{18.18}$$

Пример 2. В коробке 3 красных и 7 синих шариков. Наугад извлекается один шарик, затем второй. Найти вероятность того, что первый шарик красный, а второй — синий.

□ Пусть событие A означает, что первый взятый шарик — красный, а B — что второй шарик синий. Тогда $P(A) = 3/10$. Так как после извлечения красного в коробке осталось 9 шариков, условная вероятность $P(B \mid A) = 7/9$. Тогда по формуле (18.18) искомая вероятность $P(A \cap B) = P$ (первый шарик красный, второй — синий) $= P(A)P(B \mid A) = 3/10 \cdot 7/9 = 7/30$.

Имеет место

Теорема 18.1. Для произвольных событий A_1, A_2, ..., A_n справедлива формула

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)\ldots \\ \ldots P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}). \tag{18.19}$$

□ Докажем эту формулу для случая $n = 3$. Согласно формуле (18.18), последовательно будем иметь

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2)P(A_3|A_1 \cap A_2) = \\ = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2). \blacksquare$$

Пример 3. Кодовая комбинация состоит из 10 импульсов трех форм: A, B и C, причем в каждой кодовой комбинации 3 импульса имеют форму A, 2 импульса — форму B, 5 импульсов — форму C. Найти вероятность прихода первых трех импульсов в последовательности ABC.

□ Согласно формуле (18.19), искомая вероятность

$$P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B).$$

По условию $P(A) = 3/10$, $P(B/A) = 2/9$, так как импульс A уже пришел и осталось 9 возможностей для двух импульсов формы B. Далее, $P(C|A \cap B) = 5/8$, так как импульсы A и B пришли и для 5 импульсов формы C осталось 8 возможностей. Таким образом, $P(A \text{ и } B \text{ и } C) = P(ABC) = 3/10 \cdot 2/9 \cdot 5/8 = 1/24$.

Независимые события. События A и B называются *независимыми*, если

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \tag{18.20}$$

В этом случае, согласно формуле (18.16), $P(A|B) = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$, т. е. появление события B не оказывает никакого влияния на вероятность события A.

Если A и B независимые события, то независимы также события: а) $\bar{A}$ и B; б) A и $\bar{B}$; в) $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

Докажем, например, независимость событий $\bar{A}$ и B. В самом деле, если A и B независимы, то $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Так как $\bar{A} \cap B = B \setminus (A \cap B)$, то $P(\bar{A} \cap B) = P(B \setminus (A \cap B)) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B)P(\bar{A})$, т. е. $\bar{A}$ и B независимые события.

События A_1, A_2, ..., A_n называются *попарно независимыми*, если любая пара их независима, т. е. $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$, $i \neq j$. События A_1, A_2, ..., A_n называются *независимыми в совокупности*, если при любом выборе различных событий A_{i_1}, ..., A_{i_k} из данной совокупности выполняется равенство

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}). \tag{18.21}$$

Ясно, что из независимости событий в совокупности следует их попарная независимость. Однако попарная независимость событий не гарантирует их независимости в совокупности.

Если события A_1, A_2, ..., A_n независимы в совокупности, то из определения (18.21) получаем равенство

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2) \cdots P(A_n), \tag{18.22}$$

обобщающее формулу (18.20).

Из формул (18.22) и (18.14) следует утверждение: вероятность появления хотя бы одного события A из независимых в совокупности событий A_1, A_2, ..., A_n

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) \cdots P(\bar{A}_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\bar{A}_i). \tag{18.23}$$

Пример 4. Вероятности попадания в цель из трех винтовок $P(A_1)=0{,}8$; $P(A_2)=0{,}7$; $P(A_3)=0{,}9$ соответственно, где A_i — попадание в мишень i-м стрелком, $i=1, 2, 3$. Найти вероятность: а) хотя бы одного попадания; б) только одного попадания.

□ а) Попадание в цель из каждой винтовки не зависит от результата стрельбы из других винтовок, т. е. стрельба из винтовок — независимые в совокупности события. Промах является событием, противоположным попаданию. Для этих винтовок вероятности промаха $P(\bar{A}_1)=0{,}2$; $P(\bar{A}_2)=0{,}3$; $P(\bar{A}_3)=0{,}1$ соответственно. Тогда, согласно равенству (18.23), искомая вероятность $P(A)=1-0{,}2\cdot 0{,}3\cdot 0{,}1=0{,}994$.

б) Только одно попадание в мишень может осуществиться в одной из трех ситуаций: 1) 1-й стрелок поразил цель, 2-й и 3-й стрелки промахнулись — событие $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$; 2) 2-й стрелок попал, а 1-й и 3-й промахнулись — событие $\bar{A}_1A_2\bar{A}_3$; 3) 1-й и 2-й стрелки промахнулись, а третий попал — событие $\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$. События $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$, $\bar{A}_1A_2\bar{A}_3$ и $\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$ несовместны. Тогда искомая вероятность попадания в мишень только одним стрелком

$$P(A)=P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1A_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3)+$$
$$+P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)=$$
$$=0{,}8\cdot 0{,}3\cdot 0{,}1+0{,}2\cdot 0{,}7\cdot 0{,}1+0{,}2\cdot 0{,}3\cdot 0{,}9=0{,}092.$$

Формула полной вероятности. Пусть события H_1, H_2, ..., H_n попарно независимы и образуют полную группу событий, т. е. $\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} H_i=\Omega$. Такие события иногда называются *гипотезами*. Имеет место

Теорема 18.2. Вероятность события A, которое может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий H_1, H_2, ..., H_n, образующих полную группу событий, равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события A, т. е.

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+\ldots+$$
$$+P(H_n)P(A|H_n). \qquad (18.24)$$

Равенство (18.24) называется *формулой полной вероятности*.

□ Так как $\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} H_i=\Omega$, то

$$A=A\cap\Omega=A\cap\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} H_i\right)=\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}}(A\cap H_i)=\sum_{i=1}^{n}(A\cap H_i),$$

причем события $A\cap H_i$ попарно несовместны в силу попарной несовместности гипотез H_i, $i=1, 2, \ldots, n$. Тогда по формуле (18.10)

$$P(A)=P\left(\sum_{i=1}^{n}(A\cap H_i)\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A\cap H_i).$$

Применив к каждому слагаемому в правой части формулу (18.18), получим равенство $P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(H_i)P(A|H_i)$, совпадающее с равенством (18.24). ■

Пример 5. В лаборатории имеется 6 мини-ЭВМ «Искра» и 4 микрокалькулятора «Электроника». Вероятность того, что во время выполнения расчета «Искра» не выйдет из строя, равна 0,95, для «Электроники» эта вероятность равна 0,8. Найти вероятность того, что взятое наугад вычислительное устройство не выйдет из строя до окончания расчета.

□ Пусть A — событие, состоящее в том, что вычислительное устройство не выйдет из строя. Это событие может произойти с одной из гипотез: H_1 — взята «Искра», H_2 — взята «Электроника». Тогда $P(H_1)=6/10$, $P(H_2)=4/10$ и по условию задачи $P(A|H_1)=0{,}95$, $P(A|H_2)=0{,}8$. По формуле полной вероятности искомая вероятность $P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)=0{,}6\cdot 0{,}95+0{,}4\cdot 0{,}8=0{,}89$.

Формула Байеса*. Формула Байеса дает возможность определить условные *апостериорные* (после опыта) вероятности $P(H_k|A)$, $k=1, 2, \ldots, n$, если известны *априорные* (до опыта) вероятности $P(H_k)$ гипотез H_k, образующих полную группу событий. Эта формула имеет вид

$$P(H_k|A)=\frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(H_i)P(A|H_i)},\quad k=1, 2, \ldots, n. \tag{18.25}$$

Для ее вывода достаточно в формуле условной вероятности $P(H_k|A)=\frac{P(A\cap H_k)}{P(A)}$ записать числитель по формуле произведения вероятностей (18.18), а знаменатель — по формуле полной вероятности (18.24).

Пример 6. В канцелярии работают 4 секретарши, которые отправляют 40, 10, 30 и 20 % исходящих бумаг. Вероятности неверной адресации бумаг секретаршами равны 0,01; 0,04; 0,06; 0,01 соответственно. Найти вероятность того, что документ, неверно адресованный, отправлен третьей секретаршей.

□ Введем гипотезы H_i — документ отправила i-я секретарша, $i=1, 2, 3, 4$. Тогда по условию задачи $P(H_1)=0{,}4$; $P(H_2)=0{,}1$; $P(H_3)=0{,}3$; $P(H_4)=0{,}2$. Обозначим через A событие, состоящее в том, что документ адресован неверно. Тогда по условию $P(A|H_1)=0{,}01$; $P(A|H_2)=0{,}04$; $P(A|H_3)=0{,}06$; $P(A|H_4)=0{,}01$ и искомая вероятность

$$P(H_3|A)=P\ (\text{документ неверно адресовала 3-я секретарша})=$$
$$=\frac{P(H_3)P(A|H_3)}{P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+P(H_3)P(A|H_3)+P(H_4)P(A|H_4)}=$$
$$=\frac{0{,}3\cdot 0{,}06}{0{,}4\cdot 0{,}01+0{,}1\cdot 0{,}04+0{,}3\cdot 0{,}06+0{,}2\cdot 0{,}1}=0{,}391.$$

Итак, 3-я секретарша допускает примерно 39 % (!) всех ошибок.

Задачи и упражнения

1. Обследовалась группа из 10 000 человек в возрасте свыше 60 лет. Оказалось, что 4000 человек являются постоянно курящими. У 1800 из курящих обнаружились серьезные изменения в легких. Среди некурящих изменения в легких имели 1500 человек. Являются ли курение и наличие изменений в легких независимыми событиями?

2. Для сигнализации об аварии установлено три независимо работающих устройства. Вероятность срабатывания при аварии первого устройства равна 0,9; второго — 0,85; третьего — 0,8. Найти вероятность срабатывания только двух устройств.

3. В первой коробке находится 20 радиоламп, из них 18 стандартных; во второй коробке 10 радиоламп, из них 9 стандартных. Из второй коробки наугад взята лампа и переложена в первую. Найти вероятность того, что лампа, наугад взятая из первой коробки, будет стандартной.

* Т. Байес (1702—1761) — английский математик.

4. Качество изготовляемых деталей проверяется двумя контролерами. Вероятность попадания детали к первому контролеру равна 0,6, ко второму — 0,98. Вероятность считать деталь качественной для первого контролера равна 0,94, а для второго — 0,98. Готовая деталь признана качественной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

18.4. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЙ

Схема испытаний Бернулли. На практике часто решаются задачи, связанные с многократно повторяющимися испытаниями (опытами), в результате каждого из которых может появиться или не появиться некоторое событие A. При этом представляет интерес исход не каждого отдельного испытания, а общее число появления события A в результате определенного числа опытов.

Последовательные испытания называются *независимыми*, если вероятность осуществления любого исхода в каждом n-м испытании не зависит от реализации исходов предыдущих испытаний. Легко представить испытания с двумя возможными исходами A и $\bar{A}$, где A означает, например, «успех», а $\bar{A}$ — «неудачу», причем в каждом испытании вероятность p «успеха» и вероятность $q = 1 - p$ «неудачи» постоянны. Серию независимых испытаний с одной и той же вероятностью «успеха» $p = P(A)$ называют *испытаниями* или *схемой Бернулли*.

Обозначим через $P_n(m)$ вероятность появления m раз события A в серии из n независимых испытаний. Тогда справедлива *формула Бернулли*

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{18.26}$$

Действительно, вероятность того, что при n испытаниях событие A наступит m раз и, следовательно, не появится $n - m$ раз, согласно формуле (18.22) умножения событий, равна $p^m q^{n-m}$. Но событие A может наступить при любом m из n возможных испытаний. Так как число возможных комбинаций m элементов из n равно C_n^m, то по формуле (18.10) искомая вероятность $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$.

Пример 1. Производится 4 выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле $p = 0{,}3$. Найти вероятность двух попаданий.

□ Стрельба по мишени есть последовательность независимых опытов (выстрелов) с постоянными вероятностями попадания $p = 0{,}3$ и непопадания $q = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$ при каждом выстреле. По формуле Бернулли $P_4(2) = C_4^2 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^2 = 0{,}2446$.

Биномиальное распределение вероятностей. Правая часть формулы Бернулли (18.26) есть общий член разложения бинома Ньютона

$$(q + p)^n = q^n + C_n^1 p q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \ldots + C_n^m p^m q^{n-m} + \ldots + p^n, \tag{18.27}$$

поэтому, если m придавать значения 0, 1, 2, ..., $n - 1$, n, получим соответствующую последовательность вероятностей

$$P_n(0),\ P_n(1),\ P_n(2),\ \ldots,\ P_n(n-1),\ P_n(n). \tag{18.28}$$

Совокупность вероятностей (18.28) называется *биномиальным распределением вероятностей.*

Поскольку множество $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ — число появлений событий при n испытаниях — составляет полную группу событий, ясно, что $\sum_{m=0}^{n} P_n(m) = 1$. Заметим, что это равенство следует из формулы (18.27), поскольку $p + q = 1$.

Биномиальное распределение (18.28) позволяет определить не только вероятность появления события A ровно m раз при n испытаниях, но и вероятность $P_n(k \leqslant m \leqslant l)$ того, что число m появлений события A заключено на некотором отрезке $[k, l]$, $0 \leqslant k < l \leqslant n$. В силу несовместности событий $\{k, k+1, \ldots, l-1, l\}$ искомая вероятность

$$P_n(k \leqslant m \leqslant l) = P_n(k) + P_n(k+1) + \ldots + P_n(l-1) + P_n(l). \quad (18.29)$$

Пример 2. По каналу связи передается 5 сообщений. Каждое из сообщений независимо от других с вероятностью 0,3 искажается помехами. Найти вероятности событий: а) из 5 сообщений 3 искажены; б) не менее 4 из 5 сообщений переданы неискаженными; в) не более двух передаваемых сообщений искажены; г) все сообщения приняты без искажений; д) не менее двух сообщений искажено.

□ а) Так как вероятность искажения $p = 0{,}3$, а вероятность передачи сообщения без помех $q = 1 - p = 0{,}7$, то по формуле Бернулли $P_5(3) = C_5^3 \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}7^2 = 0{,}1323$.

б) Искомая вероятность неискажения может быть найдена по формуле (18.29), в которой p нужно заменить на $1 - p$:

$$P_5(4 \leqslant m \leqslant 5) = C_5^4 \cdot 0{,}7^4 \cdot 0{,}3 + C_5^5 \cdot 0{,}7^5 = 0{,}5482.$$

в) Вероятность $P_5(0 \leqslant m \leqslant 2) = 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^5 + C_5^1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^4 + C_5^2 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^3 = 0{,}8569$.

г) Заменяя в формуле Бернулли p на $1 - p$, получаем $P_5(5) = C_5^5 \cdot 0{,}7^5 = 0{,}1881$.

д) Искомая вероятность $P_5(2 \leqslant m \leqslant 5) = C_5^2 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^3 + C_5^3 \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}7^2 + C_5^4 \times \times 0{,}3^4 \cdot 0{,}7 + C_5^5 \cdot 0{,}3^5 = 0{,}3143$.

Вероятнейшее число появлений события. Покажем, что при некотором числе m_0 вероятность $P_n(m)$ как функция целочисленного аргумента m достигает своего наибольшего значения. Число m_0 называется *наиболее вероятным* или *вероятнейшим числом* появлений события A в серии из n испытаний.

Рассмотрим отношение

$$\frac{P_n(m+1)}{P_n(m)} = \frac{C_n^{m+1} p^{m+1} q^{n-m-1}}{C_n^m p^m q^{n-m}} = \frac{n! p^{m+1} q^{n-m-1} m! (n-m)!}{(m+1)(n-m-1)! n! p^m q^{n-m}} = \frac{n-m}{m+1} \frac{p}{q}.$$

Замечаем, что $P_n(m+1) > P_n(m) \Leftrightarrow \frac{n-m}{m+1} \frac{p}{q} > 1$, т. е. функция $P_n(m)$ возрастает, если $m < np - q$. Аналогично $P_n(m+1) < P_n(m) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{n-m}{m+1} \frac{p}{q} < 1$, т. е. $P_n(m)$ убывает, если $m > np - q$.

Итак, при $m < np - q$ функция $P_n(m)$ возрастает, а при $m > np - q$ — убывает. Таким образом, существует число m_0, при котором $P_n(m)$ достигает наибольшего значения. Найдем его.

По смыслу числа m_0 имеем $P_n(m_0) \geqslant P_n(m_0-1)$ и $P_n(m_0) \geqslant P_n(m_0+1)$. Отсюда

$$\frac{n!p^{m_0}q^{n-m_0}}{m_0!(n-m_0)!} \geqslant \frac{n!p^{m_0-1}q^{n-m_0+1}}{(m_0-1)!(m-m_0+1)!} \tag{18.30}$$

и

$$\frac{n!p^{m_0}q^{n-m_0}}{m_0!(n-m_0)!} \geqslant \frac{n!p^{m_0+1}q^{n-m_0-1}}{(m_0+1)!(m-m_0-1)!}. \tag{18.31}$$

Решая неравенства (18.30) и (18.31) относительно m_0, получаем:

$$p/m_0 \geqslant q/(n-m_0+1) \Rightarrow m_0 \leqslant np+p;$$
$$q/(n-m_0) \geqslant p/(m_0+1) \Rightarrow m_0 \geqslant np-q.$$

Итак, искомое число m_0 удовлетворяет неравенствам

$$np-q \leqslant m_0 \leqslant np+p. \tag{18.32}$$

Так как $p+q=1$, то имеется по крайней мере одно целое число m_0, удовлетворяющее неравенствам (18.32).

Пример 3. Известно, что 1/45 часть продукции, изготовляемой заводом, не удовлетворяет требованиям стандарта. Завод изготовил 4500 единиц продукции. Найти вероятнейшее число изделий завода, удовлетворяющих требованиям стандарта.

□ Так как вероятность изготовления бракованного изделия $q=1/45$, то вероятность изделия, удовлетворяющего стандарту, $p=44/45$. По формуле (18.32) $4500 \cdot 44/45 - 1/45 \leqslant m_0 \leqslant 4500 \cdot 44/45 + 44/45$, т. е. $4400 - 1/45 \leqslant m_0 \leqslant 4400 + 44/45$. Итак, искомое наиболее вероятное число изделий, удовлетворяющих требованиям стандарта, равно 4400.

Предельные теоремы в схеме Бернулли. Распределение Пуассона. Формула Бернулли в схеме независимых испытаний при больших n приводит обычно к громоздким вычислениям. Поэтому для вычисления соответствующих вероятностей важно иметь приближенные, достаточно простые формулы. В частности, в задачах, в которых рассматривается большое число независимых испытаний, а вероятность p наступления события A в каждом испытании мала, вероятность $P_n(m)$ может быть приближенно вычислена по *формуле Пуассона* (при достаточно больших n). Справедлива

Теорема 18.3. (Пуассона) Пусть вероятность события A при каждом испытании в серии из n независимых испытаний равна λ/n, где $\lambda > 0$ — постоянная, не зависящая от n. Тогда вероятность $P_n(m)$ при $n \to \infty$ и фиксированном m стремится к $\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$.

□ Имеем

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{m!(n-m)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} = \frac{\lambda^m}{m!} \times$$

$$\times \lim_{n\to\infty} \left(\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{n^m}\right) = \frac{\lambda^m}{m!} \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \times$$

$$\times \lim_{n\to\infty} \left(1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}\right) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},$$

так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$. ■

Таким образом, если $n\to\infty$, при выполнении условий теоремы получаем

$$P(m) = \lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},\ m=0,\ 1,\ \ldots,\ n,\ \lambda = np. \quad (18.33)$$

Соотношение (18.33) называется *формулой* или *распределением Пуассона*. Из-за малости p распределение Пуассона называют также *законом распределения редких явлений*.

Итак, если вероятность p события A мала, а число n независимых испытаний велико, можно пользоваться приближенной формулой

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},\ \lambda = np,\ m=0,\ 1,\ \ldots,\ n. \quad (18.34)$$

Пример 4. Вычислительный центр (ВЦ) обслуживают 100 программистов, не связанных общей задачей. Вероятность того, что в течение 1 мин программист обратится в ВЦ, равна 0,01. Найти вероятность того, что в течение 1 мин обратятся в ВЦ: а) три программиста; б) менее трех программистов; в) более трех программистов; г) хотя бы один программист.

□ Так как обращения в ВЦ программистов являются независимыми событиями, число $n = 100$ велико, а вероятность $p = 0{,}01$ мала, воспользуемся формулой (18.34).

а) Находим $\lambda = np = 100 \cdot 0{,}01 = 1$. Вероятность события «в ВЦ обратились три программиста» ($m = 3$)

$$P_{100}(3) = \frac{1}{3!}e^{-1} = 0{,}0613.$$

б) По этой же формуле вероятность того, что в ВЦ обратятся менее трех программистов,

$$P_{100}(0) + P_{100}(1) + P_{100}(2) = e^{-1} + e^{-1} + e^{1/2} = 0{,}9197.$$

в) События A — «в ВЦ обратятся более трех программистов» и $\bar{A}$ — «обратятся не более трех программистов» — противоположные, поэтому, согласно пп. «а» и «б», вероятность события A

$$P = 1 - P(\bar{A}) = 1 - (P_{100}(0) - P_{100}(1) - P_{100}(2) - P_{100}(3)) = 1 - 0{,}9197 - \\ - 0{,}0613 = 0{,}0019.$$

г) События A — «в ВЦ обратился хотя бы один программист» и $\bar{A}$ — «в ВЦ никто не обратился» — противоположные, поэтому вероятность события A есть $P = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P_{100}(0) = 1 - e^{-1} = 0{,}632$.

Локальная предельная теорема Муавра — Лапласа. Приближенную формулу для вычисления вероятности $P_n(m)$ устанавливает

Теорема 18.4 (локальная теорема Муавра — Лапласа). Пусть вероятность события A в n независимых испытаниях равна p, $0 < p < 1$. Тогда вероятность $P_n(m)$ того, что в этих испытаниях событие A наступит m раз, удовлетворяет при $n\to\infty$ соотношению

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2},$$

где $q = 1 - p$; $x = (m - np)/\sqrt{npq}$.

Другими словами, при больших n имеет место *приближенная локальная формула Муавра — Лапласа*

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \tag{18.35}$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}. \tag{18.36}$$

Формула (18.35) дает удовлетворительное значение вероятности при достаточно больших значениях n, а также если p не слишком близко к 0 или 1.

Доказательство формулы (18.35) приведено в § 18.10.

Функция $\varphi(x)$, определенная равенством (18.36), четная, поэтому в прил. 1 приведены ее значения только для $x > 0$.

Пример 5. По данным ОТК радиозавода, 0,8 всего объема выпускаемых транзисторов не имеют дефектов. Найти вероятность того, что среди взятых наугад 400 транзисторов дефекты будут иметь 80.

□ В задаче $n = 400$, $m = 80$, $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$, $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{80 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 0$.

Из прил. 1 находим, что $\varphi(0) = 0{,}3989$. Тогда по формуле (18.35) искомая вероятность $P_{400}(80) = \dfrac{1}{8}\varphi(0) = \dfrac{1}{8}0{,}3989 = 0{,}04986$.

Заметим, что при вычислении этой вероятности по формуле Бернулли получается громоздкое выражение $P_{400}(80) = \dfrac{400!}{80!\ 320!}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{80}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{320}$.

Интегральная предельная теорема Муавра — Лапласа. На практике при большом числе испытаний n и не слишком малой вероятности p важно оценить вероятность того, что число появлений события A лежит в некоторых границах. Эту оценку устанавливает

Теорема 18.5 (интегральная теорема Муавра — Лапласа). Пусть m — число наступления события A в серии из n независимых испытаний, p — вероятность наступления события A при каждом испытании, $0 < p < 1$. Тогда вероятность $P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2)$ того, что в этих испытаниях событие A появится не менее m_1 раз и не более m_2 раз, удовлетворяет при $n \to \infty$ соотношению

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-z^2/2}dz,$$

где $x_1 = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$; $x_2 = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Другими словами, при больших значениях n имеет место приближенная *интегральная формула Муавра — Лапласа*

$$P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) = (\Phi(x_2) - \Phi(x_1)), \tag{18.37}$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}dz. \tag{18.38}$$

Функция (18.38) называется *интегралом ошибок*. Она нечетная, т. е. $\Phi(-x)=-\Phi(x)$. Ее значения при $x \geqslant 0$ приведены в прил. 2.

Формула 18.37 доказывается в § 18.10.

Оценка погрешности при использовании формулы (18.37) показывает, что эта формула обеспечивает хорошую точность уже при значениях $npq \geqslant 10$.

Пример 6. Найти вероятность того, что при 10 000 бросаниях монеты цифра выпадет: а) не менее 4000 и не более 6000 раз; б) не более 4000 раз; в) не менее 6000 раз.

□ а) Вероятность выпадения цифры $p=1/2$, тогда $q=1/2$. Далее, $n=10\,000$, $m_1=4000$, $m_2=6000$. Определяем x_1 и x_2:

$$x_1=\frac{4000-10\,000\cdot 0{,}5}{\sqrt{2500}}=-20;\ x_2=\frac{6000-5000}{50}=20.$$

Тогда, согласно Прил. 2, искомая вероятность приближенно $P_{10\,000}(4000 \leqslant m \leqslant 6000)=$ $=\Phi(20)-\Phi(-20)=2\Phi(20)=2\cdot 0{,}5=1$.

б) Аналогично с учетом Прил. 2 вероятность $P_{10\,000}(0 \leqslant m \leqslant 4000)=$ $=\Phi\left(\frac{4000-5000}{50}\right)-\Phi\left(\frac{0-5000}{50}\right)=\Phi(-20)-\Phi(-100)=\Phi(100)-\Phi(20)=$ $=0{,}5-0{,}5=0$.

в) Вероятность $P_{10\,000}(6000 \leqslant m \leqslant 10\,000)=\Phi\left(\frac{10\,000-5000}{50}\right)-$ $-\Phi\left(\frac{6000-5000}{50}\right)=\Phi(100)-\Phi(20)=0$.

Пусть n — число испытаний, p — вероятность появления события A в каждом испытании, m/n — относительная частота появления события A. Найдем вероятность $P(|m/n-p| \leqslant \varepsilon)$ того, что отклонение относительной частоты m/n от вероятности p по абсолютной величине не превосходит заданного числа ε.

Задача состоит в отыскании вероятности $P(|m/n-p| \leqslant \varepsilon)=$ $=P(p-\varepsilon \leqslant m/n \leqslant p+\varepsilon)=P(np-n\varepsilon \leqslant m \leqslant np+n\varepsilon)$, т. е. $m_1=$ $=np-n\varepsilon$, $m_2=np+n\varepsilon$. Из интегральной формулы Муавра — Лапласа следует, что

$$x_1=\frac{np-n\varepsilon-np}{\sqrt{npq}}=-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}};\ x_2=\frac{np+n\varepsilon-np}{\sqrt{npq}}=\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}.$$

Тогда искомая вероятность

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right| \leqslant \varepsilon\right)=\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)-\Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \tag{18.39}$$

Пример 7. Вероятность того, что деталь нестандартная, равна 0,1. Сколько деталей нужно отобрать, чтобы с вероятностью 0,9544 можно было утверждать, что относительная частота появления нестандартных деталей отклоняется от постоянной вероятности $p=0{,}1$ по абсолютной величине не более чем на 0,03.

□ Имеем $p=0{,}1$, $q=0{,}9$, $\varepsilon=0{,}03$, $P(|m/n-0{,}1| \leqslant 0{,}03)=0{,}9544$. Требуемое число n найдем по формуле (18.39):

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right| \leqslant 0{,}03\right)=0{,}9544=2\Phi\left(0{,}03\sqrt{\frac{n}{0{,}1\cdot 0{,}9}}\right),$$

т. е. $\Phi(0{,}1\sqrt{n})=0{,}4772$. По Прил. 2 находим, что $0{,}4772=\Phi(2)$, или $2=0{,}1\sqrt{n} \Rightarrow$ $\Rightarrow n=400$.

Задачи и упражнения

1. Монета бросается 5 раз. Найти вероятность ни одного, одного, двух, трех, четырех и пяти выпадений решетки.

2. Десять рабочих работают независимо друг от друга, причем каждый из них использует электроэнергию в среднем 12 мин в течение 1 ч. В любой момент времени каждому рабочему с одной и той же вероятностью может потребоваться одна единица электроэнергии. Мощность электропитательной установки рассчитана на 6 единиц. Найти вероятность перегрузки.

3. Вероятность брака изделия $p = 0{,}02$. Какова вероятность того, что из 100 деталей будет не более 4 бракованных?

4. Вероятность нарушения работы кинескопа телевизора в течение гарантийного срока равна 0,3. Найти вероятность того, что из 20 наблюдаемых телевизоров гарантийный срок выдержат 15 телевизоров.

5. Двадцать процентов изготовляемых на заводе кинескопов для телевизоров не выдерживают гарантийный срок службы. Найти вероятность того, что из партии численностью 600 кинескопов количество, не выдержавших этот срок, находится между 100 и 125.

6. Сколько раз надо бросить монету для того, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,99, частота появления герба отличалась от вероятности $p = 0{,}5$ не больше, чем на 0,01?

18.5. СКАЛЯРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Понятие случайной величины. *Случайной величиной* (с. в.) называют величину, которая в результате испытания принимает то или иное возможное значение, заранее неизвестное и зависящее от случайных обстоятельств. Примерами с. в. являются: сумма выпавших очков на верхних гранях при подбрасывании двух игральных костей; число m появления события в схеме испытаний Бернулли; число вызовов, поступивших на АТС в течение определенного времени; дальность полета снаряда при выстреле из орудия и т. д.

Дадим строгое определение скалярной с. в. Пусть $\{\Omega, F, p\}$ — вероятностное пространство и $X = X(\omega)$ — действительная функция, определенная на Ω. Обозначим через A для каждого $x \in \mathbf{R}$ множество всех точек $\omega \in \Omega$, удовлетворяющих условию $X(\omega) < x$, т. е.

$$A = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\}, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{18.40}$$

Кратко соотношение (18.40) записывается в виде $A = (X(\omega) < x)$ или $A = (X < x)$.

Действительная функция $X = X(\omega)$, определенная на пространстве событий Ω, называется *случайной величиной,* если для любого $x \in \mathbf{R}$ множество $A = (X < x)$ принадлежит F, т. е. является событием. Скалярная с. в. X присваивает действительное значение $X(\omega)$ каждой точке $\omega \in \Omega$.

Обычно рассматривают два типа с. в.: дискретные и непрерывные. Дискретной называется такая с. в., которая принимает конечное или счетное множество значений. Дискретная с. в. используется при описании измерений, принимающих целочисленные значения: число дефектных изделий, число телефонных вызовов, число неисправностей в приборе и т. д.

Для некоторых с. в. число возможных значений, принимаемых этой величиной, бывает настолько велико, что удобнее представ-

лять измерения в виде непрерывных с. в., которые принимают любое значение в некотором интервале, например продолжительность работы электролампы, дальность полета снаряда и т. д.

Закон распределения вероятностей случайной величины. Для полного описания дискретной с. в. недостаточно знать ее возможные значения. Необходимо, кроме этого, охарактеризовать вероятности, с которыми принимаются эти значения. Такое полное описание дискретной с. в. называется *законом распределения.*

Пусть дискретная с. в. X может принимать значения $x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n \ldots$ Обозначим $p_i = P(X = x_i)$ вероятность того, что с. в. X принимает значение x_i, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ Таблица

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_i	$\ldots$	x_n	$\ldots$
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_i	$\ldots$	p_n	$\ldots$

(18.41)

называется *таблицей распределения* вероятностей дискретной с. в. X или *законом распределения* дискретной с. в. В дальнейшем предполагается, что $x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots$.

Поскольку дискретная с. в. X обязательно принимает одно из значений x_i, то события $(X = x_i)$ образуют полную группу событий, поэтому $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Пример 1. В денежной лотерее выпущено 200 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 50 руб., два выигрыша по 25 руб. и десять выигрышей по 1 руб. Найти закон распределения с. в. X — величины выигрыша, если приобретен один билет.

□ Возможные выигрыши X следующие: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 25$, $x_4 = 50$. Вероятность выиграть: 0 руб.— $p_1 = 187/200$, так как 187 билетов из 200 безвыигрышные; 1 руб.— $p_2 = 10/200$; 25 руб.— $p_3 = 2/200$; 50 руб.— $p_4 = 1/200$. Следовательно, закон распределения имеет вид

X	0	1	25	50
p	187/200	10/200	2/200	1/200

Пример 2. Рассмотрим закон распределения с. в. X — числа появлений события A при испытаниях Бернулли. Поскольку при n испытаниях событие A происходит m раз с вероятностью $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, то закон распределения этой с. в. имеет вид

X	0	1	2	$\ldots$	m	$\ldots$	n
p	q^n	npq^{n-1}	$\frac{n(n-1)}{2!}p^2q^{n-2}$		$C_n^m p^m q^{n-m}$		p^n

Функция распределения случайной величины. Пусть (Ω, F, p) — вероятностное пространство и $X = X(\omega)$ — с. в. Тогда $A = (X < x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$, является событием и, следовательно, для каждого $x \in \mathbf{R}$ определена вероятность

$$P(A) = P(X < x) = F(x). \tag{18.42}$$

Функция (18.42), определенная для всех $x \in \mathbf{R}$, называется *функцией распределения* с. в. X или *интегральной функцией распределения* с. в. X.

Выясним ее свойства.

1°. Значения $F(x)$ принадлежат отрезку $[0, 1]$, т. е. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Это следует из того, что $F(x)$ есть вероятность события $A = (X < x)$.

2°. $F(x)$ — неубывающая функция, т. е. $(x_1 < x_2) \Rightarrow F(x_1) \leqslant F(x_2)$.

□ Пусть $x_1 < x_2$. Событие $(X < x_2)$ можно представить в виде суммы двух несовместных событий $(X < x_1)$ и $(x_1 \leqslant X < x_2)$, т. е. $(X < x_2) = (X < x_1) \cup (x_1 \leqslant X < x_2)$ (рис. 18.3). Тогда по формуле сложения вероятностей несовместных событий $P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \leqslant H < x_2)$, т. е. $F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 \leqslant X < x_2)$. Отсюда

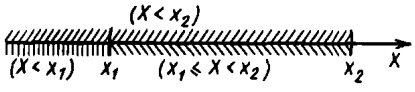


Рис. 18.3

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \leqslant X < x_2) \geqslant 0, \tag{18.43}$$

т. е. свойство 2° имеет место. ■

3°. Если с. в. X принимает возможное значение x_i с вероятностью P_i, то ее функция распределения $F(x)$ имеет в точке x_i разрыв первого рода со скачком $F(x_i + 0) - F(x_i - 0) = p_i$. В точке x_i функция $F(x)$ непрерывна слева.

□ Событие $(X \leqslant x)$ можно представить в виде

$$(X \leqslant x_i) = (X < x_i) \cup \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(x_i \leqslant X < x_i + \frac{1}{n} \right) \right),$$

где пересечение берется по всем $n = 1, 2, \ldots$ Тогда по формуле сложения вероятностей в силу непрерывности вероятности P получаем

$$P(X \leqslant x_i) = P(X < x_i) + P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(x_i \leqslant X < x_i + \frac{1}{n} \right) \right) =$$

$$= F(x_i) + \lim_{n \to \infty} P\left(x_i \leqslant X < x_i + \frac{1}{n} \right) = F(x_i) + P(X = x_i).$$

Отсюда

$$P(X \leqslant x_i) = F(x_i) + P(X = x_i). \tag{18.44}$$

Далее, так как $F(x_i + 0) = P(X < x_i + 0) = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} P(X < x_i + \varepsilon) = P(X \leqslant x_i)$, то из равенства (18.44) следует, что

$$F(x_i + 0) = F(x_i) + P(X = x_i). \tag{18.45}$$

Равенство (18.45) и доказывает свойство 3°. ■

Замечание. Свойство 3° функции $F(x)$ является следствием ее определения (18.42) как вероятности $P(X < x)$. Если же $F(x)$ определить соотношением $F(x) = P(X \leqslant x)$, то можно доказать, что $F(x)$ непрерывна справа в каждой точке $x \in \mathbf{R}$.

4°. Справедливы равенства $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$.

□ Если $x\to-\infty$, то событие $(X<-\infty)$ невозможно и, следовательно, вероятность $P(X<-\infty)=0$. Если же $x\to+\infty$, то событие $(X<+\infty)$ — достоверное и, значит, $P(X<+\infty)=1$. ■

5°. Вероятность $P(a\leqslant X<b)$ того, что с. в. X принимает значения из промежутка $[a, b)$,

$$P(a\leqslant X<b)=F(b)-F(a). \tag{18.46}$$

Равенство (18.46) вытекает непосредственно из соотношения (18.43) при $x_1=a$ и $x_2=b$.

6°. Имеет место равенство

$$P(X\geqslant x)=1-F(x). \tag{18.47}$$

□ В самом деле, $\Omega=(X<x)\cup(X\geqslant x)$, причем события $(X<x)$ и $(X\geqslant x)$ несовместны. Тогда $1=P(\Omega)=P(X<x)+P(X\geqslant x)=$ $=F(x)+P(X\geqslant x)$, что и доказывает соотношение (18.47). ■

7°. Справедливы формулы: а) $P(a<X\leqslant b)=F(b+0)-F(a+0)$; б) $P(a\leqslant X\leqslant b)=F(b+0)-F(a)$; в) $P(a<X<b)=F(b)-$ $-F(a+0)$.

□ а) Так как событие $(a<X\leqslant b)=(X\leqslant b)\setminus(X\leqslant a)$, то, согласно равенствам (18.44) и (18.45), $p(a<X\leqslant b)=P(X\leqslant b)-$ $-P(X\leqslant a)=F(b+0)-F(a+0)$.

б) Поскольку $(a\leqslant X\leqslant b)=(X\leqslant b)\setminus(X<a)$, то аналогично предыдущему $P(a\leqslant X\leqslant b)=P(X\leqslant b)-P(X<a)=F(b+0)-$ $-F(a)$.

в) Имеем $(a<X<b)=(X<b)\setminus(X\leqslant a)$. Тогда $P(a<X<b)=$ $=P(X<b)-P(X\leqslant a)=F(b)-F(a+0)$. ■

С. в. X называется *непрерывной*, если ее функция распределения непрерывна.

8°. Если X — непрерывная с. в., то вероятность того, что она принимает любое конкретное значение x, равна нулю, т. е. $P(X=x)=0$.

Это следует из равенства (18.45) и того, что для непрерывной функции $F(x)=F(x+0)=F(x-0)$.

9°. Если X — непрерывная с. в., то

$$P(a<X<b)=P(a<X\leqslant b)=P(a\leqslant X<b)=P(a\leqslant X\leqslant b)=$$
$$=F(b)-F(a). \tag{18.48}$$

Соотношения (18.48) следуют из свойств 5° и 7° и непрерывности функции $F(x)$.

10°. Если возможные значения с. в. X принадлежат отрезку $[a, b]$, то

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant a;\\ 1, & x\geqslant b.\end{cases} \tag{18.49}$$

Длина $b-a$ отрезка $[a, b]$ называется *размахом* с. в. X.

Формула (18.49) следует из определения функции $F(x)$.

Итак, всякое вероятностное пространство с. в. X определяет по формуле (18.42) однозначную действительную неотрицательную

функцию $F(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$, обладающую свойствами 1° — 10°. Основными из них, полностью характеризующими $F(x)$, являются приведенные ниже свойства:

1°. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

2°. $(x_1 < x_2) \Rightarrow F(x_1) \leqslant F(x_2)$.

3°. $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} F(x-\varepsilon) = F(x)$, т. е. $F(x)$ непрерывна в точке x слева.

4°. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Можно показать, что всякая функция, обладающая свойствами 1° — 4°, задает распределение вероятностей на подмножествах $(-\infty, x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Для этого достаточно каждому такому интервалу поставить в соответствие вероятность $F(x)$.

Пример 3. Установить, какая из функций

а) $F_1(x) = \begin{cases} e^x, & x \leqslant 0; \\ 1, & x > 0; \end{cases}$ б) $F_2(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \cos x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi/2; \\ 1, & x > \pi/2 \end{cases}$

является функцией распределения некоторой непрерывной с. в. В случае утвердительного ответа найти вероятность того, что соответствующая с. в. принимает значения -1 и 2.

□ Графики функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$ изображены на рис. 18.4, *а* и *b* соответственно. Из них видно, что только функция $F_1(x)$ является функцией распределения некоторой с. в. Для нее по формуле (18.48) вероятность $P(1 \leqslant X \leqslant 2) = F_1(2) - F_1(1) = 1 - e^{-1}$.

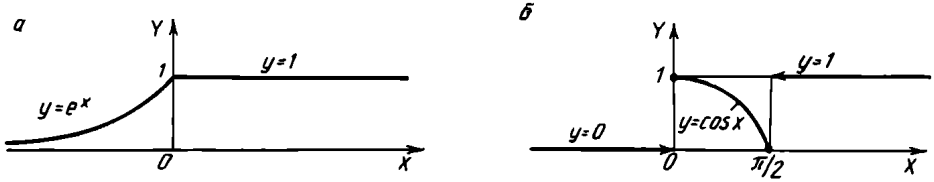


Рис. 18.4

Построение функции распределения дискретной с. в. Распределение дискретной с. в. задается таблицей (18.41). Используя свойства функции $F(x)$, получаем, что при $x_{i-1} < X \leqslant x_i$

$$F(x) = p_1 + p_2 + \ldots + p_{i-1} = \sum_{k=1}^{i-1} p_k.$$

В точке x_i, согласно свойству 3°, $F(x)$ имеет скачок $p_i = P(X = x_i) = F(x_i + 0) - F(x_i)$ и, значит, для $x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$F(x) = p_1 + p_2 + \ldots + p_{i-1} + p_i = \sum_{k=1}^{i} p_k.$$

Таким образом, функция распределения $F(x)$ дискретной с. в. X кусочно-постоянна, имеет скачки p_i в точках разрыва x_i и непрерывна слева в точках разрыва x_i. График функции $F(x)$ изображен на рис. 18.5.

Пример 4. С. в. X принимает значения $x = n$, $n = 1, 2, \ldots$, с вероятностями $P(X = n) = 2^{-n}$. Найти функцию распределения $F(x)$ и вероятность события $(3 \leqslant X \leqslant 6)$.

□ Пусть $n-1<x\leqslant n$, $n\in\mathbf{N}$. Событие $(X<x)$ означает, что с. в. X принимает значения 1, 2, ..., $n-1$ с вероятностями 2^{-1}, 2^{-2}, ..., $2^{-(n-1)}$ соответственно. Тогда функция распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 1;\\ \sum\limits_{k=1}^{n-1}2^{-k}, & n-1<x\leqslant n.\end{cases}$$

Событию $(3\leqslant X\leqslant 6)$ отвечают значения 3, 4, 5, 6 с вероятностями 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6} соответственно. Тогда

$$P(3\leqslant X\leqslant 6)=(1/2)^3+(1/2)^4+\\+(1/2)^5+(1/2)^6=15/64.$$

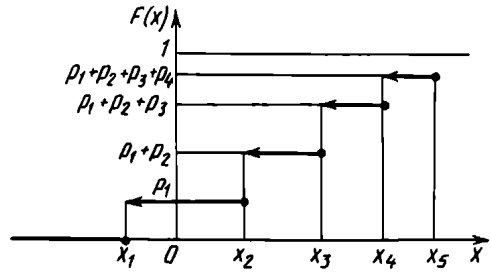


Рис. 18.5

Пример 5. На отрезке $[a, b]$ случайным образом появляется точка. Найти функцию распределения с. в. X — координаты появившейся точки.

□ Событие $(X<x)$ означает, что появившаяся точка находится на интервале $(-\infty, x)$. При $x<a$ событие $(X<a)$ невозможно. Тогда $P(X<a)=0$. При $x\in[a, b]$ вероятность появления точки на $[a, x]$ есть $P(X<x)=\dfrac{x-a}{b-a}$, так как $x-a$ — длина отрезка $[a, x]$, а $b-a$ — длина всего отрезка $[a, b]$ (рис. 18.6). При $x>b$ событие $(X<x)$ достоверно, т. е. $P(X<x)=1$. Таким образом, искомая функция распределения имеет вид

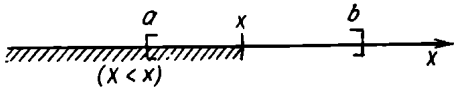


Рис. 18.6

$$F(X)=\begin{cases}0, & x\leqslant a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\leqslant b;\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

Плотность вероятностей с. в. *Плотностью вероятностей* с. в. X или *дифференциальной функцией распределения* называется предел

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x<X<x+\Delta x)}{\Delta x},\qquad(18.50)$$

если он существует.

Пусть $F(x)$ — функция распределения с. в. X. Если существует $F'(x)$, то равенство (18.50) равносильно соотношению

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=F'(x).\qquad(18.51)$$

Итак, *плотность вероятностей равна производной от функции распределения.*

Пусть X — дискретная с. в., принимающая значение x_i с вероятностью p_i, $i=1, 2, \ldots$ Тогда ее функция распределения $F(x)$ кусочно-постоянна и в точках x_i имеет скачки P_i. В таком случае на основании формулы (17.93) можно записать:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}p_i\delta(x-x_i),\qquad(18.52)$$

где $\delta(x)$ — δ-функция Дирака.

Выясним свойства плотности вероятностей.

1°. Функция $f(x)\geqslant 0$, $\forall x\in\mathbf{R}$.*

В самом деле, $F(x)$ — неубывающая функция. Следовательно, $f(x)=F'(x)\geqslant 0$.

2°. Справедливо равенство

$$P(a\leqslant X\leqslant b)=\int_a^b f(x)dx. \tag{18.53}$$

Действительно,

$$P(a\leqslant X\leqslant b)=F(b)-F(a)=\int_a^b \frac{dF(x)}{dx}\,dx=\int_a^b f(x)dx.$$

Геометрически вероятность (18.53) равна площади заштрихованной криволинейной трапеции, изображенной на рис. 18.7. Если в формуле (18.53) принять $a=x$, $b=x+dx$, то приближенно

$$P(x<X<x+dx)\approx f(x)dx.$$

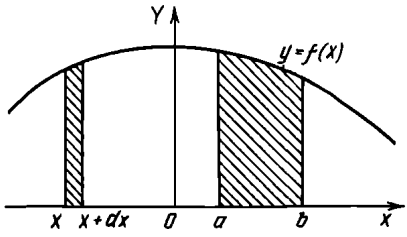


Рис. 18.7

3°. Если $f(x)$ — плотность вероятностей с. в. X, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt. \tag{18.54}$$

В самом деле, так как $F(-\infty)=0$, то

$$F(x)=F(x)-F(-\infty)=\int_{-\infty}^{x} F'(t)dt=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

4°. Имеет место соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1, \tag{18.55}$$

называемое *условием нормировки.*

Действительно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} F'(x)dx=F(+\infty)-F(-\infty)=1-0=1.$$

Пример 6. Плотность вероятностей с. в. X есть $f(x)=cx^2e^{-kx}$, $k>0$, $x\geqslant 0$. Найти: а) коэффициент c; б) функцию распределения $F(x)$; в) вероятность попадания с. в. в интервал $(0,\ 1/k)$.

□ а) Из условия нормировки (18.55) имеем

$$\left(\int_0^{\infty} cx^2e^{-kx}dx=1\right)\Rightarrow\left(c=1/\int_0^{\infty} x^2e^{-kx}dx=k^3/2\right).$$

Следовательно, $f(x)=\dfrac{k^3}{2}\,x^2e^{-kx}$.

б) По формуле (18.54)

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_0^x \frac{k^3}{2}\,t^2e^{-kt}dt=1-\frac{k^2x^2+2kx+2}{2}\,e^{-kx}.$$

в) Согласно равенству (18.48),

$$P(0 < X < 1/k) = F(1/k) - F(0) = 1 - 5/(2e) - 0 \approx 0{,}086.$$

Законы распределения некоторых с. в. Приведем несколько наиболее употребительных законов распределения с. в.

1. *Биномиальный закон.* В схеме испытаний Бернулли функция распределения $F(x)$ имеет вид ступенчатой функции с разрывами в точках $x = 0, 1, 2, \ldots, n$, причем величина скачка в точке $x = m$ равна $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ (см. пример 2).

2. *Распределение Пуассона.* С. в. называется распределенной по закону Пуассона, если она принимает дискретные значения из ряда чисел 0, 1, 2, ..., m, ... с вероятностями

$$P(X = m) = p_m = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$

где λ — параметр распределения.

Покажем, что $\sum\limits_{m=0}^{\infty} p_m = 1$. Действительно,

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

3. *Равномерное распределение.* С. в. X называется равномерно распределенной на $[a, b]$, если ее плотность вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & a \leqslant x \leqslant b; \\ 0, & x < a, \ x > b. \end{cases} \tag{18.56}$$

Функция распределения равномерно распределенной с. в. получена в примере 5. Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ изображены на рис. 18.8, *а* и *б* соответственно.

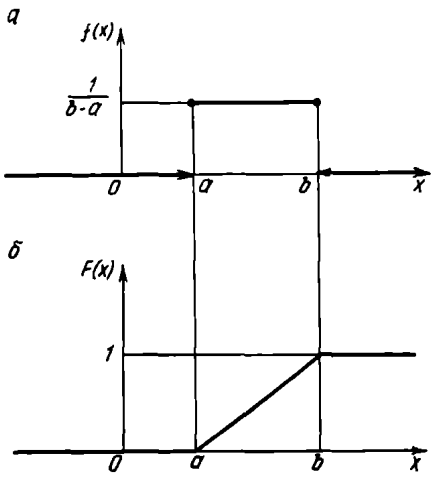


Рис. 18.8

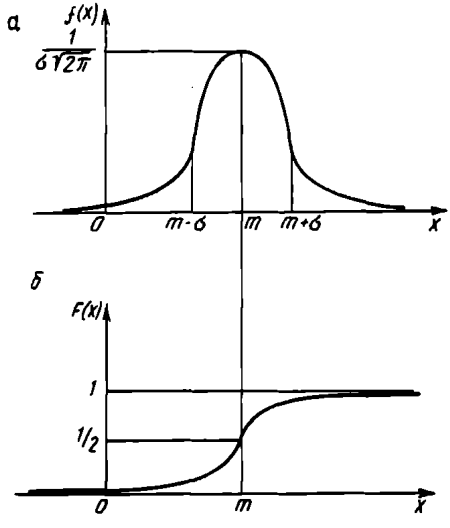


Рис. 18.9

4. *Нормальное распределение* (распределение Гаусса). С. в. X называется распределенной *по нормальному закону* или имеет *гауссовское распределение*, если ее плотность вероятностей имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},\ \sigma>0. \tag{18.58}$$

Согласно формуле (18.54), ее функция распределения

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}dt. \tag{18.59}$$

Как видно из формул (18.58) и (18.59), нормальное распределение зависит от параметров m и σ и полностью определяется ими. Графики функции $f(x)$ и $F(x)$ изображены на рис. 18.9, *а* и *б* соответственно. Максимум ординаты кривой $y=f(x)$ равен $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$. Отсюда следует, что чем больше σ, тем шире кривая и тем ниже ее максимум. График плотности $y=f(x)$ симметричен относительно прямой $x=m$. В сокращенном виде нормальное распределение записывают так: $N(m, \sigma)$ или $N(m, \sigma^2)$. При $m=0$, $\sigma=1$ получаем так называемое *стандартное нормальное распределение* $N(0, 1)$.

5. *Экспоненциальное распределение.* С. в. X называется распределенной *по экспоненциальному закону*, если плотность распределения вероятностей

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x>0;\ \lambda>0.\end{cases} \tag{18.60}$$

Отсюда функция распределения

$$F(X)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1-e^{-\lambda x}, & x>0;\ \lambda>0.\end{cases} \tag{18.61}$$

Задачи и упражнения

1. Бросают две игральные кости. Пусть X — число очков, выпавшее на верхней грани первой кости, Y — число очков, выпавшее на верхней грани второй кости. Составить закон распределения с. в. $X+Y$.

2. С. в. X имеет функцию распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ x^2/16, & 0\leqslant x<2;\\ x^2-7/4, & 2\leqslant x<11/4;\\ 1; & x\geqslant 11/4.\end{cases}$$

Найти: а) плотность вероятностей $f(x)$; б) вероятность попадания с. в. X на отрезок $[1;\ 1{,}5]$.

3. Являются ли плотностями вероятностей некоторой непрерывной с. в. функции:

а) $f_1(x)=\begin{cases}1, & -0{,}5\leqslant x\leqslant 0{,}5;\\ 0, & x<-0{,}5,\ x>0{,}5;\end{cases}$ б) $f_2(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$, $x\in\mathbf{R}$.

Построить их графики и найти соответствующие им функции распределения.

18.6. ВЕКТОРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Понятие векторной с. в. Наряду с одномерными рассматриваются многомерные с. в.— векторы, координаты которых являются одномерными с. в. Такие с. в. называются *векторными.*

Пример 1. Векторными являются с. в., приведенные ниже.

а) Пусть X_1 — рост человека, X_2 — его масса. Тогда вектор $\mathbf{X}=(X_1, X_2)$ является двумерной с. в., характеризующей рост и массу человека.

б) Случайное положение центра тяжести ракеты в пространстве является трехмерной с. в. $\mathbf{X}=(X_1, X_2, X_3)$, где X_1, X_2, X_3 — координаты этого центра в некоторой декартовой системе координат.

в) Систему автоматического регулирования с m входами и n выходами можно рассматривать как $m \times n$-векторную с. в.

Рассмотрим совокупность n с. в. $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$, ..., $X_n(\omega)$, определенных на пространстве элементарных событий Ω. Эту совокупность можно рассматривать как векторную с. в. $\mathbf{X}=\mathbf{X}(\omega)=(X_1(\omega), X_2(\omega), ..., X_n(\omega))$. Вектор $\mathbf{X}(\omega)$ геометрически интерпретируется как случайная точка $\mathbf{X}=(X_1(\omega), X_2(\omega), ..., X_n(\omega))$ в пространстве $\mathbf{R}^n$, зависящая от элементарного события $\omega \in \Omega$.

Для простоты рассмотрим двумерный случайный вектор $\mathbf{Z}=(X, Y)$, где $X=X(\omega)$, $Y=Y(\omega)$, $\omega \in \Omega$.

Закон распределения вероятностей дискретной векторной с. в. Если X и Y — дискретные (непрерывные) с. в., вектор $\mathbf{Z}=(X, Y)$ называется *дискретным (непрерывным) случайным вектором.*

Пусть с. в. X принимает значения $x_1, x_2, ..., x_m$, а с. в. Y — значения $y_1, y_2, ..., y_n$. Тогда очевидно, что с. в. $\mathbf{Z}=(X, Y)$ принимает значения (x_i, y_j), $i=1, 2, ..., m$, $j=1, 2, ..., n$. Обозначим через $P_{ij}=P(X=x_i, Y=y_i)$ вероятность того, что с. в. X принимает значение x_i, а с. в. Y — значение y_j. Для полного описания дискретного случайного вектора $\mathbf{Z}=(X, Y)$ необходимо знать значения (x_i, y_i) этого вектора и соответствующие вероятности P_{ij}. Такое полное описание удобно осуществлять с помощью табл. 18.1.

Таблица 18.1

x \ y	y_1	y_2		y_n
x_1	p_{11}	p_{12}		p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}		p_{2n}
x_m	p_{m1}	p_{m2}		p_{mn}

Табл. 18.1 называется *законом распределения двумерной с. в.* (случайного вектора). Так как события $(x = x_i,\ Y = y_j)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots n$ образуют полную группу, то $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$.

Зная закон распределения дискретного с. в. (X, Y), можно найти законы распределения с. в. X и Y. Именно с. в. X принимает значение x_i в комбинациях (x_i, y_1), (x_i, y_2), ..., (x_i, y_n) с вероятностями $p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{in}$, расположенными в i-й строке табл. 18.1. Таким образом, событие

$$(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} (X = x_i,\ Y = y_j). \tag{18.62}$$

Тогда по теореме сложения вероятностей несовместных событий

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{n} P(X = x_i,\ Y = y_j) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}. \tag{18.63}$$

Следовательно, закон распределения с. в. X имеет вид табл. 18.2.

Таблица 18.2

X	x_1	x_2		x_m
p_x	$P_{1x} = \sum_{j=1}^{n} p_{1j}$	$p_{2x} = \sum_{j=1}^{n} p_{2j}$		$p_{mx} = \sum_{j=1}^{n} p_{mj}$

Рассуждая аналогично, найдем, что закон распределения с. в. Y имеет вид табл. 18.3.

Таблица 18.3

Y	y_1	y_2		y_n
p_Y	$p_{1Y} = \sum_{i=1}^{m} p_{i1}$	$p_{2Y} = \sum_{i=1}^{m} p_{i2}$		$p_{nY} = \sum_{i=1}^{m} p_{in}$

Пример 2. Найти законы распределения с. в. X и Y, если закон распределения двумерной с. в. (X, Y) имеет вид

X \ Y	0	1	2
-1	0	1/4	1/8
3	1/4	1/4	1/8

□ С. в. X принимает значения -1 и 3, а с. в. Y — значения 0, 1, 2. По табл. 18.2 и 18.3 имеем:

X	-1	3
p_X	3/8	5/8

и

Y	0	1	2
p_Y	1/4	1/2	1/4

Это и есть искомые законы распределения с. в. X и Y соответственно.

Функция распределения векторной с. в. Пусть $\mathbf{Z}=(X, Y)$ — двумерная с. в. Обозначим

$$P(X<x,\ Y<y),\ \forall x,\ y\in\mathbf{R}, \tag{18.64}$$

вероятность того, что одновременно с. в. X принимает значения, меньшие x, а с. в. Y — значения, меньшие y, т. е. $P(X<x,\ Y<y)$ определяет вероятность совместного появления события $(X<x,\ Y<y)$. Функция

$$F(x,\ y)=P(X<x,\ Y<y),\ \forall x,\ y\in\mathbf{R}, \tag{18.65}$$

называется *функцией распределения двумерной* с. в. (X, Y) или *совместной функцией распределения* с. в. X и Y. Геометрически функция распределения $F(x, y)$ задает вероятность попадания случайной точки (X, Y) в бесконечный прямой угол с вершиной в точке (x, y) (рис. 18.10).

Функция распределения $F(x, y)$ обладает следующими свойствами.

1°. Значения $F(x, y)$ принадлежат отрезку $[0, 1]$, т. е.

$$0\leqslant F(x,\ y)\leqslant 1,\ \forall x,\ y\in\mathbf{R}.$$

2°. Функция $F(x, y)$ является неубывающей по каждому из своих аргументов, т. е.

$$\begin{aligned}&(x_2>x_1)\Rightarrow F(x_2,\ y)\geqslant F(x_1,\ y),\\ &\qquad\forall y\in\mathbf{R},\\ &(y_2>y_1)\Rightarrow F(x,\ y_2)\geqslant F(x,\ y_1),\\ &\qquad\forall x\in\mathbf{R}.\end{aligned} \tag{18.66}$$

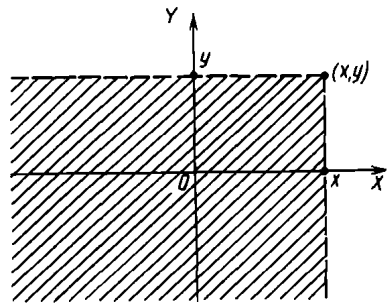


Рис. 18.10

3°. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} F(x,\ y)=1.$

4°. $\lim\limits_{y\to-\infty} F(x,\ y)=\lim\limits_{x\to-\infty} F(x,\ y)=\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}} F(x,\ y)=0.$

Доказательства свойств 1°—4° аналогичны доказательствам свойств 1°—4° функции распределения одномерной с. в. Для примера докажем первое из соотношений (18.66). В самом деле, при $x_1<x_2$ событие $(X<x_2)=(X<x_1)\cup(x_1\leqslant X<x_2)$. Тогда $(X<x_2,\ Y<y)=(X<x_1,\ Y<y)\cup(x_1\leqslant X<x_2,\ Y<y)$. Отсюда по теореме сложения вероятностей несовместных событий

$$P(X<x_2,\ Y<y)=P(X<x_1,\ Y<y)+P(x_1\leqslant X<x_2,\ Y<y),$$

т. е.

$$F(x_2,\ y)=F(x_1,\ y)+P(x_1\leqslant X\leqslant x_2,\ Y<y)$$

или

$$0\leqslant P(x_1\leqslant X<x_2,\ Y<y)=F(x_2,\ y)-F(x_1,\ y),$$

что совпадает с неравенством (18.66).

5°. При $y=+\infty$ $(x=+\infty)$ получим функции распределения $F_x(x)$ и $F_y(y)$ с. в. X и Y соответственно:

$$F(x,\ +\infty)=F_X(x);\ F(y,\ +\infty)=F_Y(y). \tag{18.67}$$

В самом деле,

$$F(x,\ +\infty)=P(X<x,\ Y<+\infty)=P(X<x)=F_X(x),$$

так как событие $(Y<+\infty)$ достоверное.

Функции $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ называются *маргинальными функциями распределения с. в. X и Y.*

6°. Вероятность того, что двумерная с. в. $(X,\ Y)$ примет значения: а) внутри полуполосы $a_1\leqslant X<a_2,\ Y<y$ (рис. 18.11); б) внутри полуполосы $b_1\leqslant Y<b_2,\ X<x$ (рис. 18.12); в) внутри прямоугольника $\Pi=\{a_1\leqslant X<a_2,\ b_1\leqslant Y<b_2\}$ (рис. 18.13), равна соответственно:

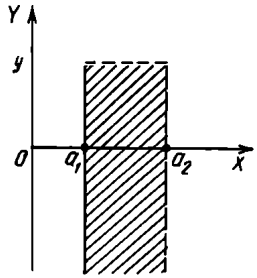


Рис. 18.11

а) $P(a_1\leqslant X<a_2,\ Y<y)=$
$=F(a_2,\ y)-F(a_1,\ y);$ (18.68)

б) $P(X<x,\ b_1\leqslant Y<b_2)=$
$=F(x,\ b_2)-F(x,\ b_1);$ (18.69)

в) $P(a_1\leqslant X<a_2,\ b_1\leqslant Y<b_2)=$
$=F(a_2,\ b_2)-F(a_1,\ b_2)-$
$-F(a_2,\ b_1)+F(a_1,\ b_1).$ (18.70)

□ Докажем сначала равенство (18.68). При $a_1<a_2$ событие

$$(X<a_2,\ Y<y)=(X<a_1,\ Y<y)\cup(a_1\leqslant X<a_2,\ Y<y).$$

Отсюда

$$P(X<a_2,\ Y<y)=P(X<a_1,\ Y<y)+P(a_1\leqslant X<a_2,\ Y<y)$$

или

$$F(a_2,\ y)=F(a_1,\ y)+P(a_1\leqslant X<a_2,\ Y<y),$$

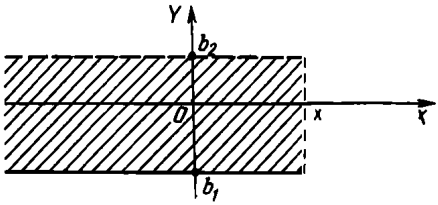


Рис. 18.12

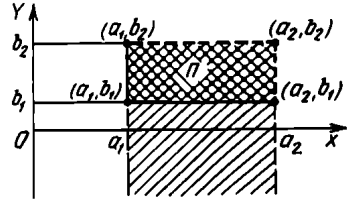


Рис. 18.13

т. е.

$$P(a_1 \leqslant X < a_2,\ Y < y) = F(a_2,\ y) - F(a_1,\ y).$$

Аналогично доказывается равенство (18.69).

Докажем теперь формулу (18.70). При $y = b_2$ из равенства (18.68) получим вероятность попадания случайной точки $(X,\ Y)$ в бесконечную полуполосу $\{a_1 \leqslant X \leqslant a_2,\ Y < b_2\}$:

$$P(a_1 \leqslant X < a_2,\ Y < b_2) = F(a_2,\ b_2) - F(a_1,\ b_2). \qquad (18.71)$$

Аналогично равенство

$$P(a_1 \leqslant X \leqslant a_2,\ Y < b_1) = F(a_2,\ b_1) - F(a_1,\ b_1) \qquad (18.72)$$

определяет вероятность попадания в полуполосу $\{a_1 \leqslant X \leqslant a_2,\ Y < b_1\}$. Вычитая равенство (18.72) из равенства (18.71), получаем искомую вероятность (18.70) попадания в прямоугольник П. ■

Плотность вероятностей векторной с. в. *Плотностью вероятностей двумерной с. в.* $\mathbf{Z} = (X,\ Y)$ *или совместной плотностью вероятностей с. в.* X *и* Y называется предел

$$f(x,\ y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P(x < X < x + \Delta x,\ y < Y < y + \Delta y)}{\Delta x \Delta y}, \qquad (18.73)$$

если он существует.

Из определения плотности вероятностей следует, что вероятность попадания случайной точки $(X,\ Y)$ в прямоугольник П (рис. 18.14) достаточно малых размеров приближенно

$$P(x < X < x + \Delta x,\ y < Y < y + \Delta y) = f(x,\ y)\Delta x \Delta y. \qquad (18.74)$$

Пусть $F(x,\ y)$ — функция распределения векторной с. в. $(X,\ Y)$ и пусть существует смешанная производная F''_{xy}. По формуле (18.70) при $a_1 = x$, $a_2 = x + \Delta x$, $b_1 = y$, $b_2 = y + \Delta y$ вероятность $P(x < X < x + \Delta x,\ \ y < Y < y + \Delta y) = F(x + \Delta x,\ \ y + \Delta y) - F(x,\ \ y + \Delta y) - F(x + \Delta x,\ y) + F(x,\ y)$. Тогда соотношение (18.73) можно записать в виде

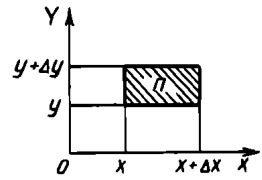


Рис. 18.14

$$f(x,\ y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{(F(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - F(x,\ y + \Delta y)) - (F(x + \Delta x,\ y) - F(x,\ y))}{\Delta x \Delta y} =$$

$$= F''_{xy}(x,\ y) \qquad (18.75)$$

(см. доказательство теоремы 6.7, ч. II).

Итак, *плотность вероятностей двумерной с. в.* $(X,\ Y)$ *равна смешанной частной производной функции распределения* $F(x,\ y)$, если эта производная существует.

Выясним свойства плотности вероятностей $f(x,\ y)$.

1°. Функция $f(x,\ y)$ неотрицательна, т. е. $f(x,\ y) \geqslant 0$, $\forall x,\ y$.

Это следует из определения (18.73) функции $f(x,\ y)$ как предела отношения вероятности попадания случайной точки $(X,\ Y)$ в беско-

нечно малый прямоугольник Π (рис. 18.14) к площади $\Delta x \Delta y$ этого прямоугольника при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

2°. Для произвольной замкнутой области D на плоскости вероятность $P((X, Y) \in D)$ попадания случайной точки (X, Y) в D равна

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y)dxdy, \tag{18.76}$$

где $f(x, y)$ — плотность вероятностей с. в. (X, Y).

3°. Функция распределения с. в. $F(x, y)$ случайного вектора (X, Y) связана с его плотностью вероятностей соотношением

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v)dudv. \tag{18.77}$$

Действительно, интеграл (18.77) по свойству 2° выражает вероятность попадания случайной точки (X, Y) в бесконечный угол с вершиной в точке (x, y) (см. рис. 18.10). А это, согласно определению, и есть искомая вероятность $F(x, y)$.

Из равенства (18.77) последовательным дифференцированием по x и по y получаем соотношение (18.75).

4°. Имеет место *условие нормировки*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy = 1. \tag{18.78}$$

Действительно, с учетом равенств (18.75) и свойств 3°—4° функции $F(x, y)$ получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} F''_{xy}(x, y)dy \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(F'_x(x, +\infty) - \right.$$

$$\left. - F'_x(x, -\infty) \right) dx = (F(x, \infty) - F(x, -\infty)) \Big|_{-\infty}^{\infty} = F(\infty, \infty) -$$

$$- F(\infty, -\infty) - F(-\infty, \infty) + F(-\infty, -\infty) = 1.$$

Условие нормировки (18.78) выражает достоверность попадания случайной точки (X, Y) в любую точку плоскости X, Y.

5°. Маргинальные функции $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ распределения с. в. X и Y

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, y)dudy; \quad F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{y} f(x, v)dxdv \tag{18.79}$$

соответственно.

Это следует непосредственно из равенств (18.77) и (18.67).

Пусть $f(x, y)$ — плотность вероятностей двумерной с. в. (X, Y). Требуется отыскать плотности вероятностей $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ с. в. X и Y соответственно.

6°. Справедливы равенства

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy; \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx. \tag{18.80}$$

Эти соотношения следуют из равенств (18.79), если последние продифференцировать по x и по y соответственно (с учетом определения (18.51) плотности вероятностей одномерной с. в.).

Функции $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ называются *маргинальными плотностями вероятностей с. в. X и Y.*

Пример 2. Случайный вектор $\mathbf{Z}=(X, Y)$ имеет плотность вероятностей

$$f(x, y)=\frac{A}{\pi^2(16+x^2)(25+y^2)},\ x, y\in\mathbf{R}.$$

Найти: а) величину A; б) функцию распределения $F(x, y)$; в) вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник $\Pi=\{-4\leqslant x\leqslant 4,\ 0\leqslant y\leqslant 5\}$; г) маргинальные функции распределения $F_X(x)$ и $F_Y(y)$; д) маргинальные плотности вероятностей $f_X(x)$ и $f_Y(y)$.

□ а) Величину A найдем из условия нормировки (18.78):

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A\,dx\,dy}{\pi^2(16+x^2)(25+y^2)}=1\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{A}{\pi^2}\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}\Big|_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{y}{5}\Big|_{-\infty}^{\infty}=1\right)\Rightarrow(A=20).$$

б) По формуле (18.77)

$$F(x, y)=\frac{20}{\pi^2}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\frac{du\,dv}{(16+u^2)(25+y^2)}=$$

$$=\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{5}+\frac{1}{2}\right).$$

в) По формуле (18.76) искомая вероятность

$$P((X, Y)\in\Pi)=\frac{20}{\pi^2}\iint_{\Pi}\frac{dx\,dy}{(16+x^2)(25+y^2)}=\frac{20}{\pi^2}\int_{-4}^{4}\frac{dx}{16+x^2}\cdot\int_{0}^{5}\frac{dy}{25+y^2}=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}\Big|_{-4}^{4}\operatorname{arctg}\frac{y}{5}\Big|_{0}^{5}=\frac{1}{4}.$$

г) По формуле (18.79) маргинальная функция распределения

$$F_X(x)=\frac{20}{\pi^2}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du\,dy}{(16+u^2)(25+y^2)}=$$

$$=\frac{20}{\pi^2}\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{u}{4}\Big|_{-\infty}^{x}\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{y}{5}\Big|_{-\infty}^{\infty}=\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}\right).$$

Аналогично получим $F_Y(y)=\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{5}+\frac{\pi}{2}\right)$.

д) Дифференцируя $F_X(x)$ и $F_Y(y)$, получаем маргинальные плотности вероятностей $f_X(x)=\frac{4}{\pi(16+x^2)}$, $f_Y(y)=\frac{5}{\pi(25+y^2)}$.

Зависимые и независимые с. в. Случайные величины с. в. X и Y называются *независимыми,* если вероятность $P(X<x,\ Y<y)$ совместного появления событий $(X<x)$ и $(Y<y)$ равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(X<x,\ Y<y)=P(X<x)P(Y<y).\qquad(18.81)$$

В противном случае с. в. X и Y называются *зависимыми*. Примером зависимых с. в. может служить X — рост человека и Y — его масса, которые с определенной степенью точности связаны эмпирической формулой Y (кг) $= X$ (см) $- 100$.

Покажем, что если X и Y — независимые с. в., то и $\varphi(X)$ и $\varphi(Y)$, где φ — некоторая действительная функция, тоже независимы.

В самом деле, вероятность $P(\varphi(X) \in (-\infty, x), \varphi(Y) \in (-\infty, y)) = P(X \in \varphi^{-1}(-\infty, x), Y \in \varphi^{-1}(-\infty, y)) = P(X \in \varphi^{-1}(-\infty, x))P(Y \in \varphi^{-1}(-\infty, y)) = P(\varphi(X) \in (-\infty, x) \times P(\varphi(Y) \in (-\infty, y))$, что, согласно определению (18.81), означает независимость с. в. $\varphi(X)$ и $\varphi(Y)$. (Напомним, что $\varphi^{-1}(A)$ — прообраз множества A.)

Далее, для независимых с. в. X и Y совместная плотность $f_{XY}(x, y)$ равна произведению маргинальных плотностей $f_X(x)$ и $f_Y(y)$:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y). \tag{18.82}$$

Действительно, из соотношения (18.73) следует

$$f_{XY}(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P(x < X < x + \Delta x,\ y < Y < y + \Delta y)}{\Delta x \Delta y} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left(\frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{P(y < Y < y + \Delta y)}{\Delta y} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{P(y < Y < y + \Delta y)}{\Delta y} = f_X(x) f_Y(y).$$

Пример 3. Случайная точка (X, Y) распределена с постоянной плотностью внутри квадрата D (рис. 18.15). Определить: а) совместную плотность вероятностей $f(x, y)$ с. в. X и Y; б) маргинальные плотности $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ с. в. X и Y; в) зависимость или независимость с. в. X и Y.

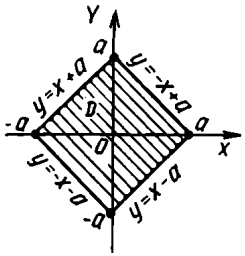


Рис. 18.15

□ а) Так как площадь квадрата равна $2a^2$, то

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/2a^2, & (x, y) \in D; \\ 0, & (x, y) \notin D; \end{cases}$$

б) По формулам (18.80) находим маргинальную плотность вероятностей:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a^2} \displaystyle\int_{\substack{-x-a \\ -x+a}}^{x+a} dy = \frac{a+x}{a^2}, & -a < x < 0; \\ \dfrac{1}{2a^2} \displaystyle\int_{x-a}^{\substack{-x+a}} dy = \frac{a-x}{a^2}, & 0 < x < a; \\ 0, & x < -a,\ x > a, \end{cases}$$

т. е.

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}(a - |x|), & |x| < a; \\ 0; & |x| > a. \end{cases}$$

Аналогично найдем

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}(a - |y|), & |y| < a; \\ 0, & |y| > a. \end{cases} \tag{18.83}$$

в) Так как $f_X(x) f_Y(y) \neq f(x, y)$, то с. в. X и Y зависимы.

Условные законы распределения вероятностей с. в. Напомним, что условная вероятность $P(A|B)$ события A при условии, что событие B произошло, определяется по формуле

$$P(A|B)=P(A\cap B)/P(B),\ P(B)\neq 0. \tag{18.84}$$

Исходя из этого равенства введем понятие условной функции распределения вероятностей с. в.

Пусть (X, Y) — двумерный случайный вектор и $f(x, y)$ — совместная плотность распределения вероятностей с. в. X и Y. Так как $P(X<x,\ y\leqslant Y<y+\Delta y)$ есть вероятность совместного осуществления событий $(X<x)$ и $(y\leqslant Y<y+\Delta y)$, то на основании равенства (18.84) условная вероятность события $(X<x)$ при условии, что произошло событие $(y\leqslant Y<y+\Delta y)$, выразится соотношением

$$P(X<x|y\leqslant Y<y+\Delta y)=\frac{P(X<x,\ y\leqslant Y<y+\Delta y)}{P(y\leqslant Y<y+\Delta y)}. \tag{18.85}$$

Пусть $f_Y(y)$ — маргинальная плотность вероятностей с. в. Y. Тогда $P(y\leqslant Y<y+\Delta y)=\int\limits_{y}^{y+\Delta y} f_Y(v)dv$, а $P(X<x, y\leqslant Y<y+\Delta y)=$ $=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{y}^{y+\Delta y} f(u, v)dudv$. Подставив эти вероятности в равенство (18.85), получим

$$P(X<x|y\leqslant Y<y+\Delta y)=\frac{\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{y}^{y+\Delta y} f(u,\ v)du\ dv}{\int\limits_{y}^{y+\Delta y} f_Y(v)dv}.$$

Применив к правой части этого равенства теорему о среднем для интегралов по v на отрезке $[y,\ y+\Delta y]$, получим

$$P(X<x|y\leqslant Y<y+\Delta y)=\frac{\int\limits_{-\infty}^{x} f(u,\ \bar{v})du}{f_Y(\bar{\bar{v}})},$$

где $\bar{v}$ и $\bar{\bar{v}}$ — некоторые «средние» точки из $[y,\ y+\Delta y]$. Переходя в этом равенстве к пределу при $\Delta y\to 0$, найдем, что

$$P(X<x|Y=y)=\frac{\int\limits_{-\infty}^{x} f(u,\ y)du}{f_Y(y)}. \tag{18.86}$$

Обозначим $P(X<x|Y=y)=F_X(x|Y=y)$. Функция $F_X(x|Y=y)$ называется *условной функцией распределения с. в. X* при условии, что с. в. $Y=y$. Тогда из формулы (18.86) следует

$$F_X(x|Y=y)=\frac{\int\limits_{-\infty}^{x} f(u,\ y)du}{f_Y(y)}. \tag{18.87}$$

Дифференцируя это равенство по x, получаем *условную плотность вероятностей* $f_X(x|Y=y)$ с. в. X при условии, что с. в. Y принимает значение $Y=y$:

$$f_X(x|Y=y)=\frac{f(x,\ y)}{f_Y(y)}. \tag{18.88}$$

Аналогично функции

$$F_Y(y|X=x)=\frac{\int\limits_{-\infty}^{y} f(x,\ v)dv}{f_X(x)}; \tag{18.89}$$

$$f_Y(y|X=x)=\frac{f(x,\ y)}{f_X(x)} \tag{18.90}$$

называются соответственно *условной функцией распределения* и *условной плотностью вероятностей* с. в. Y при условии, что с. в. $X=x$.

Перепишем равенства (18.88) и (18.90):

$$\begin{aligned} f(x,\ y)&=f_Y(y)f_X(x|Y=y);\\ f(x,\ y)&=f_X(x)f_Y(y|X=x). \end{aligned} \tag{18.91}$$

Интегрируя первое из равенств (18.91) по y, а второе по x в бесконечных пределах, согласно равенствам (18.80), получаем

$$\begin{aligned} f_X(x)&=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\,f_X(x|Y=y)\,dy;\\ f_Y(y)&=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,f_Y(y)|X=x)\,dx \end{aligned} \tag{18.92}$$

соответственно. Выражения (18.92) называются *формулами полной вероятности.* Они позволяют по известной маргинальной плотности вероятностей одной с. в. и условной плотности вероятностей другой с. в. найти маргинальную плотность вероятностей этой другой с. в.

Подставляя $f(x,\ y)$ из второй формулы (18.91) и $f_Y(y)$ из формулы (18.92) в равенство (18.88), будем иметь

$$f_X(x|Y=y)=\frac{f(x,\ y)}{f_Y(y)}=\frac{f_X(x)f_Y(y|X=x)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(y|X=x)dx}. \tag{18.93}$$

Аналогично из первой формулы (18.91) и соотношений (18.92) и (18.90) получим

$$f_Y(y|X=x)=\frac{f(x,\ y)}{f_X(x)}=\frac{f_Y(y)f_X(x|Y=y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)f_X(x|Y=y)dy}. \tag{18.94}$$

Выражения (18.93) и (18.94) называются *формулами Байеса* для плотностей вероятностей с. в. X и Y соответственно.

Пример 4. Двумерная с. в. $(X,\ Y)$ равномерно распределена внутри круга D радиусом a (рис. 18.16) с плотностью вероятностей

$$f(x,\ y)=\begin{cases} 1/(\pi a^2), & x^2+y^2<a^2;\\ 0, & x^2+y^2>a^2. \end{cases}$$

Найти условные плотности вероятностей $f_X(x|Y=y)$ и $f_Y(y|X=x)$.

□ По формулам (18.80) найдем маргинальную плотность вероятностей:

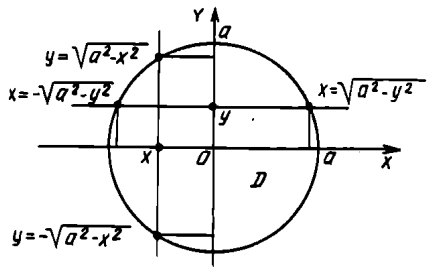


Рис. 18.16

$$f_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi a^2}\displaystyle\int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy=\dfrac{2}{\pi a^2}\sqrt{a^2-x^2}, & |x|<a;\\ 0, & |x|>a.\end{cases}$$

Аналогично находим

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi a^2}\sqrt{a^2-y^2}, & |y|<a;\\ 0, & |y|>a.\end{cases}$$

По формулам (18.88) и (18.90)

$$f_X(x|Y=y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\sqrt{a^2-y^2}/2, & |y|<a,\ |x|<\sqrt{a^2-y^2}\\ 0, & |y|>a,\ |x|>\sqrt{a^2-y^2};\end{cases}$$

$$f_Y(y|X=x)=\begin{cases}\sqrt{a^2-x^2}/2, & |x|<a,\ |y|<\sqrt{a^2-x^2};\\ 0, & |x|>a,\ |y|>\sqrt{a^2-x^2}\end{cases}.$$

Функции от непрерывных с. в. Рассмотрим зависимость φ между с. в. X и Y и найдем закон распределения $F_Y(y)$ функции $Y=\varphi(x)$ по известному закону распределения $F_X(x)$ с. в. X.

Пусть с. в. X имеет функцию распределения $F_X(x)$, а φ — действительная функция, непрерывная на $\mathbf{R}$. Тогда сложная функции $Y=\varphi(X)$ является с. в. Для любого $y\in\mathbf{R}$ событие

$$(Y<y)=(\varphi(X)<y)=(\varphi(X)\in(-\infty,\ y))=(X\in\varphi^{-1}(-\infty,\ y)),$$

где $\varphi^{-1}(-\infty,\ y)$ — прообраз промежутка $(-\infty,\ y)$. Из последнего равенства получим, что функция распределения $F_Y(y)$ искомой с. в. $Y=\varphi(x)$ имеет вид

$$F_Y(y)=P(Y<y)=P(X\in\varphi^{-1}(-\infty,\ y)). \qquad (18.95)$$

Пример 5. Пусть с. в. X имеет функцию распределения $F_X(x)$. Найти функцию распределения $F_Y(y)$ с. в. $Y=X^2$.

□ Так как $Y\geqslant 0$, то ясно, что $F_Y(y)=P(Y<0)=0$. При $Y<0$ на основании формулы (18.95) и соотношения (18.48) имеем $F_Y(y)=P(Y<y)=P(X^2<y)=$ $=P(-\sqrt{y}<X<\sqrt{y})=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$.

Итак, функция распределения с. в. $Y=X^2$ есть

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0;\\ F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y}), & y>0.\end{cases} \qquad (18.96)$$

Плотность вероятностей $f_Y(y)$ с. в. $Y=X^2$ по известной плотности $f_X(x)$ с. в. X определяется дифференцированием функции (18.96) по y:

$$f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0;\\ \dfrac{1}{2\sqrt{y}}(f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})), & y>0.\end{cases}$$

Пример 6. Найти функцию распределения $F_Y(y)$ с. в. $Y=aX+b$, если известна функция распределения $F_X(x)$ с. в. X.

□ При $a>0$ по определению

$$F_Y(y)=P(Y<y)=P(aX+b<y)=P\left(X<\frac{y-b}{a}\right)=F_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

При $a<0$ на основании равенства (18.47)

$$F_Y(y)=P(Y<y)=P(aX+b<y)=P\left(X\geqslant\frac{y-b}{a}\right)=$$
$$=1-P\left(X<\frac{y-b}{a}\right)=1-F_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Итак, функция распределения с. в. $Y=aX+b$ есть

$$F_Y(y)=\begin{cases}F_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right), & a>0;\\ 1-F_x\left(\dfrac{y-b}{a}\right), & a<0.\end{cases}\qquad(18.97)$$

Отсюда плотность распределения вероятностей с. в. $Y=aX+b$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}f_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right), & a>0;\\ -\dfrac{1}{a}f_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right), & a<0.\end{cases}\qquad(18.98)$$

Выясним, как по известной плотности вероятностей $f_X(x)$ с. в. X найти плотность вероятностей $f_Y(y)$ с. в. $Y=\varphi(X)$.

Имеет место

Теорема 18.6. Пусть $y=\varphi(x)$ — монотонная функция для всех $x\in\mathbf{R}$, а $x=\varphi^{-1}(y)=g(y)$ — обратная ей функция. Тогда плотность вероятностей $f_Y(y)$ с. в. $Y=\varphi(X)$ имеет вид

$$f_Y(y)=|f_X(g(y))\cdot g'(y)|,\qquad(18.99)$$

где $f_X(x)$ — плотность вероятностей с. в. X.

□ Пусть $\varphi(x)$ строго монотонно возрастающая функция для всех $X\in\mathbf{R}$. По определению событие $(Y<y)=(\varphi(X)<y)=(X<\varphi^{-1}(y))=(X<g(y))$. Тогда $F_Y(y)=P(Y<y)=P(X<g(y))=F_X(g(y))$. Дифференцируя это равенство по y, получим

$$f_Y(y)=f_X(g(y))\cdot g'(y).\qquad(18.100)$$

Если $\varphi(x)$ — строго монотонно убывающая функция для всех $x\in\mathbf{R}$, а $x=\varphi^{-1}(y)=g(y)$ — обратная ей функция. Тогда плотность $(\varphi(x)<y)\Rightarrow(x\geqslant\varphi^{-1}(y))$ (рис. 18.17). Тогда $(Y<y)=(\varphi(x)<y)=(X\geqslant\varphi^{-1}(y))=(X\geqslant g(y))$. Отсюда $F_Y(y)=P(Y<y)=P(X\geqslant g(y))=1-P(X<g(y))=1-F_X(g(y))$. Продифференцировав это равенство, получим

$$f_Y(y)=-f_X(g(y))\cdot g'(y).\qquad(18.101)$$

Объединив равенства (18.100) и (18.101), получим формулу (18.99). ■

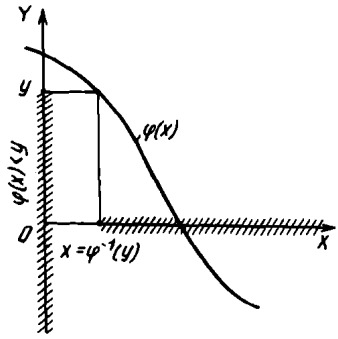


Рис. 18.17

Пример 7. С. в. X распределена нормально с плотностью $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$. Найти плотность вероятностей с. в. $Y=2X^3+3$.

□ Функция $y=2x^3+3$ строго монотонно возрастает для всех $x\in\mathbf{R}$. Обратная ей функция $x=\sqrt[3]{(y-3)/2}=g(y)$, откуда $g'(y)=\frac{1}{3\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{(y-3)^2}}$. По формуле (18.99) искомая плотность вероятностей

$$f_Y(y)=\frac{1}{3\sqrt[3]{2}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\sqrt[3]{\left(\frac{y-3}{2}\right)^2}}\frac{1}{\sqrt[3]{(y-3)^2}}.$$

Пусть двумерная векторная с. в. $\mathbf{W}=(U, V)$ связана с векторной с. в. $\mathbf{Z}=(X, Y)$ соотношениями $U=\varphi_1(X, Y)$, $V=\varphi_2(X, Y)$, где $u=\varphi_1(x, y)$, $v=\varphi_2(x, y)$ определяют взаимно однозначное отображение. Пусть, кроме того, существует обратное отображение $x=g_1(u, v)$, $y=g_2(u, v)$ с якобианом

$$\left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right|=\left|\frac{D(g_1, g_2)}{D(u, v)}\right|=\begin{vmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial v}\\ \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0.$$

Тогда, если $f_{XY}(x, y)$ — совместная плотность вероятностей с. в. (X, Y), то по аналогии с формулой (18.99) можно получить, что совместная плотность $f_{UV}(u, v)$ с. в. (U, V) имеет вид

$$f_{UV}(u, v)=f_{XY}(g_1(u, v), g_2(u, v))\left|\frac{D(g_1, g_2)}{D(u, v)}\right|. \qquad (18.102)$$

Пример 8. Найти плотность вероятностей с. в.: а) $X+Y$; б) $XY(X>0, Y>0)$, если совместная плотность вероятностей с. в. X и Y равна $f(x, y)$.

□ 1) Положим $u=x$, $v=x+y$. Отсюда

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\\ v-u\end{pmatrix}\Rightarrow\left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right|=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1.$$

По формуле (18.102) совместная плотность вероятностей

$$f_{UV}(u, v)=f_{XY}(u, v-u). \qquad (18.103)$$

Поскольку требуется найти плотность вероятностей с. в. $V=X+Y$ по известной совместной плотности вероятностей $f_{UV}(u, v)$, воспользуемся формулой (18.80). Интегрируя равенство (18.103) по переменной u, получаем

$$f_V(v)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{XY}(u, v-u)du,\ V=X+Y. \qquad (18.104)$$

В частности, если, с. в. X и Y независимы, то совместная плотность $f_{XY}(x, y)=f_X(x)f_Y(y)$. В этом случае по формуле (18.104)

$$f_{X+Y}(v)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(u)f_Y(v-u)du. \qquad (18.105)$$

Таким образом, если X и Y независимые с. в,, плотность вероятностей их суммы определяется сверткой (18.105) функции $f_X(x)$ и $f_Y(y)$.

2) Имеем

$$\left.\begin{array}{l} u=x; \\ v=xy \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=u; \\ y=v/u \end{array}\right. \Rightarrow \left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -v/x^2 & 1/u \end{vmatrix} = \frac{1}{u}.$$

По формуле (18.102) совместная плотность

$$f_{UV}(u, v) = f_{XY}\left(u, \frac{v}{u}\right)\frac{1}{u}.$$

Интегрируя это равенство по u от 0 до ∞ ($x = u > 0$), находим

$$f_V(v) = \int_0^\infty f_{XY}\left(u, \frac{v}{u}\right)\frac{du}{u}, \quad V = XY. \tag{18.106}$$

Функции от дискретных с. в. Пусть X — дискретная с. в. с законом распределения $P(X = x_i) = P_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Рассмотрим с. в. $Y = \varphi(X)$, где φ — заданная функция.

Если с. в. X принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_m$, то очевидно, что с. в. $Y = \varphi(X)$ принимает значения $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_m)$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_m$ соответственно. Если значения $\varphi(x_i)$ различны, закон распределения с. в. $Y = \varphi(X)$ имеет вид табл. 18.4

Таблица 18.4

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_m
Y	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$	$\ldots$	$\varphi(x_m)$
p_Y	p_1	p_2	$\ldots$	p_m

Если же $\varphi(x_i) = \varphi(x_j)$, $i \neq j$, то в силу несовместности событий $(X = x_i)$ и $(X = x_j)$ получаем $(X = x_i) \cup (X = x_j) = (Y = \varphi(x_i))$. Отсюда по теореме сложения вероятностей несовместных событий $(i \neq j)$ $P(Y = \varphi(x_i)) = P(X = x_i) + P(X = x_j) = P_i + P_j$.

Пример 9. Найти закон распределения с. в. $Y = X^2$, если закон распределения с. в. задан таблицей

X	-3	-2	0	2	3	5
p	0,1	0,2	0,3	0,1	0,1	0,2

□ С. в. X^2 принимает значения 0, 4, 9, 25, причем значения 4 и 9 она принимает при $x = \pm 2$ и ± 3 соответственно. Тогда закон распределения вероятностей с. в. $Y = X^2$ запишется в виде таблицы

Y	0	4	9	25
p	0,3	$0,2 + 0,1 = 0,3$	$0,1 + 0,1 = 0,2$	0,2

Пусть теперь X и Y — дискретные независимые с. в. с законом распределения $P(X=x_i)=p_{x_i}$, $P(Y=y_j)=P_{Y_j}$, $i=1, 2, \ldots, m$; $j=1, 2, \ldots, n$. Проиллюстрируем способ отыскания закона распределения суммы $X+Y$ и произведения XY этих с. в. примером.

Пример 10. Найти законы распределения с. в.: а) $X+Y$; б) XY, если законы распределения независимых с. в. X и Y имеют вид

X	-2	-1	0
p_X	0,3	0,2	0,5

Y	0	1	2
p_Y	0,4	0,5	0,1

соответственно.

□ а) С. в. $X+Y$ принимает возможные значения $(x_i+y_j)=\{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2\}$, причем события

$$(X+Y=-2)=(X=-2,\ Y=0);$$
$$(X+Y=-1)=(X=-2,\ Y=1)\cup(X=-1,\ Y=0);$$
$$(X+Y=0)=(X=-2,\ Y=1)\cup(X=-1,\ Y=1)\cup(X=0,\ Y=0);$$
$$(X+Y=1)=(X=-1,\ Y=2)\cup(X=0,\ Y=1);$$
$$(X+Y=2)=(X=0,\ Y=2).$$

Так как по условию события X и Y независимы, то $P(X=x_i,\ Y=y_j)=p_{X_i}p_{Y_j}$. Поэтому на основании теоремы умножения вероятностей имеем:

$$P(X+Y=-2)=P(X=-2)P(Y=0)=0{,}3\cdot 0{,}4=0{,}12;$$
$$P(X+Y=-1)=P(X=-2)P(Y=1)+P(X=-1)P(Y=0)=$$
$$=0{,}3\cdot 0{,}5+0{,}2\cdot 0{,}4=0{,}23.$$

Аналогично

$$P(X+Y=0)=0{,}3\cdot 0{,}1+0{,}2\cdot 0{,}5+0{,}5\cdot 0{,}4=0{,}33;$$
$$P(X+Y=1)=0{,}2\cdot 0{,}1+0{,}5\cdot 0{,}5=0{,}27;$$
$$P(X+Y=2)=0{,}5\cdot 0{,}1=0{,}05.$$

Итак, искомый закон распределения с. в. $X+Y$ имеет вид

$X+Y$	-2	p -1	0	1	2
p	0,12	0,23	0,33	0,27	0,05

б) С. в. XY принимает возможные значения $x_iy_j=\{-4;\ -2;\ -1;\ 0\}$, причем события

$$(XY=-4)=(X=-2,\ Y=2);$$
$$(XY=-2)=(X=-2,\ Y=1)\cup(X=-1,\ Y=2);$$
$$(XY=-1)=(X=-1,\ Y=1);$$
$$(XY=0)=(X=-2,\ Y=0)\cup(X=-1,\ Y=0)\cup(X=0,\ Y=0)\cup(X=0,\ Y=1)\cup$$
$$\cup(X=0,\ Y=2).$$

Тогда

$$P(XY=-4)=0{,}3\cdot 0{,}1=0{,}03;\ P(XY=-2)=0{,}3\cdot 0{,}5+0{,}2\cdot 0{,}1=0{,}17;$$
$$P(XY=-1)=0{,}2\cdot 0{,}5=0{,}10;$$
$$P(XY=0)=0{,}3\cdot 0{,}4+0{,}2\cdot 0{,}4+0{,}5\cdot 0{,}4+0{,}5\cdot 0{,}5+0{,}5\cdot 0{,}1=0{,}7.$$

Итак, закон распределения с. в. XY имеет вид

XY	-4	-2	-1	0
p	0,03	0,17	0,10	0,70

Задачи и упражнения

1. С. в. X и Y совместно распределены по закону

X \ Y	0	1
-1	0,10	0,15
0	0,15	0,25
1	0,20	0,15

Найти законы распределения с. в. X и Y.

2. По совместной плотности вероятностей $f(x, y) = kxye^{-(x^2+y^2)}$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, с. в. X и Y определить коэффициент k, маргинальные плотности вероятностей $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ и условные плотности вероятностей $f_X(x|Y=y)$ и $f_Y(y|X=x)$. Зависимы ли с. в. X и Y?

3. Плотность вероятностей с. в. X

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/a, & 0 < x < a; \\ 0, & x < 0,\ x > a. \end{cases}$$

Найти плотность вероятностей с. в. $Y = X^n$

4. Показать, что если (X, Y) — двумерная с. в., $X > 0$, $Y > 0$, с совместной плотностью распределения вероятностей $f(x, y)$, то плотность вероятностей с. в. Y/X определяется равенством

$$f_{Y/X}(v) = \int_0^\infty uf(u, uv)du, \quad V = Y/X.$$

5. Найти закон распределения с. в. X/Y, если законы распределения независимых с. в. X и Y имеют вид:

X	0	4
p	0,4	0,6

Y	1	2
p	0,5	0,5

соответственно.

18.7. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СКАЛЯРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Математическое ожидание. К числовым характеристикам с. в. относятся: математическое ожидание, дисперсия, моменты различных порядков и т. д.

Пусть X — дискретная с. в., принимающая значения x_1, x_2, ... с вероятностями p_1, p_2, ... соответственно. *Математическим ожиданием* (м. о.) или *средним значением* с. в. X называется число

$$M(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = m_x \tag{18.107}$$

в предположении, что этот ряд сходится абсолютно. Если же ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i$ расходится, то говорят, что с. в. X не имеет конечного м. о. Если X — непрерывная с. в. с плотностью вероятностей $f(x)$, то ее м. о. определяется интегралом

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx \tag{18.108}$$

при условии, что он сходится абсолютно.

Формулу (18.107) для м. о. дискретной с. в. можно получить из формулы (18.108), используя δ-функцию. Так как, согласно равенству (18.52), для дискретной с. в. плотность вероятностей

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty} p_i \delta(x-x_i),$$

то с учетом фильтрующего свойства δ-функции (17.110) получаем

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \sum_{i=1}^{\infty} p_i \delta(x-x_i)dx =$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty} p_i \int_{-\infty}^{\infty} x\delta(x-x_i)dx = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i.$$

Пусть X — дискретная с. в. с законом распределения (18.41), а $Y=\varphi(X)$ — функция этой с. в. Тогда закон распределения с. в. $\varphi(X)$ имеет вид (18.106). Согласно равенству (18.107), м. о. случайной величины $Y=\varphi(X)$ определяется формулой

$$M(Y)=M(\varphi(X))=\sum_{i=1}^{\infty} x_i \varphi(x_i).$$

Если же X — непрерывная с. в. с плотностью вероятностей $f(x)$, то, обобщая предыдущие рассуждения, получаем формулу для м. о. случайной величины $Y=\varphi(X)$ в виде

$$M(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x)dx. \tag{18.109}$$

Пример 1. В денежной лотерее выпущено 200 билетов. Разыгрывается один выигрыш в размере 50 руб., два — по 25, десять — по 1 руб. Найти среднюю величину выигрыша, если куплен один билет.

□ Согласно примеру 1, § 18.5, закон распределения с. в. X — выигрыша — имеет вид

X	0	1	25	50
p	$\frac{187}{200}$	$\frac{10}{200}$	$\frac{2}{200}$	$\frac{1}{200}$

По формуле (18.107) средняя величина выигрыша

$$M(X)=0\cdot\frac{187}{200}+1\cdot\frac{10}{200}+25\cdot\frac{2}{200}+50\cdot\frac{1}{200}=\frac{11}{20}\ \text{(руб.)}$$

Итак, средний выигрыш в лотерее равен 55 коп.

Пример 2. Плотность распределения вероятностей с. в. X

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\ x>4;\\ x/8, & 0<x\leqslant 4.\end{cases}$$

Найти $M(X)$.

□ По формуле (18.108) $M(X)=\int\limits_0^4 x\,\frac{x}{8}\,dx=\frac{8}{3}$.

Выясним основные свойства м. о.

1°. М. о. числа появлений события A в одном испытании равно вероятности p этого события.

Действительно, событие A появляется в одном испытании 0 или 1 раз с вероятностями $1-p$ и p соответственно. Тогда по формуле (18.107) $M(A)=0(1-p)+1p=p$.

2°. М. о. постоянной неслучайной величины C равно C.

В самом деле, константу C можно рассматривать как с. в. X, принимающую значение C с вероятностью $p=1$. Тогда $M(X)=C\cdot 1=C$.

3°. Постоянный неслучайный множитель C можно выносить за знак математического ожидания.

Действительно, $M(CX)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} Cxf(x)dx=C\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=CM(X)$.

4°. М. о. суммы с. в. X и Y равно сумме м. о. этих величин:

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y). \qquad (18.110)$$

□ Пусть $f(x, y)$ — совместная плотность вероятностей с. в. X и Y, а $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ — их маргинальные плотности. Тогда на основании равенства (18.104) плотность вероятностей с. в. $V=X+Y$

$$f_V(v)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u,\ v-u)du.$$

По определению м. о.

$$M(V)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} vf_V(v)dv=\int\limits_{-\infty}^{\infty} v\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u,\ v-u)du\Big)dv=$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\infty}^{\infty} vf(u,\ v-u)dudv. \qquad (18.111)$$

Введем замену: $u = x$, $v = x + y$. Якобиан этого преобразования $\left|\frac{D(u, v)}{D(x, y)}\right| = 1$. Тогда по формуле замены переменных в двойном интеграле равенство (18.111) можно переписать в виде

$$M(X+Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x+y)f(x,\ y)dxdy, \qquad (18.112)$$

т. е.

$$M(X+Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x,\ y)dxdy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yf(x,\ y)dxdy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} xdx \int_{-\infty}^{\infty} f(x;\ y)dy + \int_{-\infty}^{\infty} ydy \int_{-\infty}^{\infty} f(x,\ y)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)dy = M(X) + M(Y). \blacksquare$$

5°. М. о. произведения независимых с. в. X и Y равно произведению м. о. этих с. в., т. е. $M(XY) = M(X)M(Y)$.

□ Пусть X и Y — независимые с. в. с плотностями вероятностей $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ соответственно. Тогда совместная плотность вероятностей $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$. Рассуждая здесь так же, как и при выводе формулы (18.112), приходим к равенству

$$M(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,\ y)dxdy, \qquad (18.113)$$

т. е.

$$M(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)dy = M(X)M(Y).$$

Пример 3. По проводнику с сопротивлением R, зависящим от случайных факторов (условия среды, влажность и т. д.), течет электрический ток I, являющийся с. в. Найти среднее значение падения напряжения на этом участке, считая величины R и I независимыми, если среднее значение сопротивления $R_{ср} = 30$ Ом, а средняя сила тока $I_{ср} = 5$ А.

□ Согласно закону Ома, падение напряжения на участке провода равно $U = IR$. Отсюда $M(U) = M(I)M(R) = 5 \cdot 30 = 150(\text{В}) = U_{ср}$.

Пример 4. Найти м. о. суммы числа очков, которые могут выпасть при бросании двух игральных костей.

□ Пусть X и Y — число выпавших очков на первой и второй кости соответственно. Дискретные с. в. X и Y принимают значения 1, 2, 3, 4, 5 и 6 с одинаковой вероятностью $p = 1/6$. Тогда по формулам (18.110) и (18.107) искомое м. о.

$$M(X+Y) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) + \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 7.$$

6°. Пусть $f(x, y)$ — совместная плотность вероятностей с. в. X и Y. Тогда м. о. случайных величин X и Y соответственно равны:

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y)dxdy; \quad m_y = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yf(x, y)dy. \quad (18.114)$$

□ Докажем первую из формул. Так как для с. в. X маргинальная плотность вероятностей $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy$, то

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y)dxdy. \quad ■$$

Для дискретных с. в. с совместным законом распределения $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$ в формулах (18.114) двойные интегралы заменяются двойными суммами:

$$m_x = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_i p_{ij}; \quad m_y = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} y_j p_{ij}.$$

Дисперсия. М. о. характеризует среднее значение с. в. *Отклонением* с. в. X от своего математического ожидания (среднего значения) называется с. в. $X^0 = X - M(X)$. Часто величина X^0 называется *центрированной с. в.*

Дисперсией или *рассеянием* $D(X)$ с. в. X называется м. о. квадрата отклонения с. в. X от ее м. о.:

$$D(X) = M(X^0)^2 = M(X - M(X))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x)dx, \quad (18.115)$$

если этот интеграл существует. Здесь $f(x)$ — плотность вероятностей с. в. X, а $m_x = M(X)$. Корень квадратный из дисперсии называется *средним квадратическим отклонением* с. в. X и обозначается $\sigma_x = \sqrt{D(X)}$, так что $D(X) = \sigma_x^2$.

Для дискретной с. в. X, принимающий значения x_i с вероятностью p_i, $i = 1, 2, \ldots$, дисперсия определяется равенством

$$D(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - m_x)^2 p_i = \sigma_x^2. \quad (18.116)$$

Из свойств м. о. и определения десперсии имеем

$$D(X) = M(X - M(X))^2 = M(X^2 - 2M(X)X + M^2(X)) = \\ = M(X^2) - 2M(X)M(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Итак,

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - m_x^2. \quad (18.117)$$

Для дискретной с. в. X равенство (18.117) имеет вид

$$D(X) = M(X^2) - m_x^2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i - m_x^2. \quad (18.118)$$

Формула (18.118) удобна для вычисления дисперсии.

Замечание. Из определения дисперсии (8.115) с. в. X следует, что $D(X) \geqslant 0$. Если дисперсия мала, то каждый член суммы (18.116) тоже мал. Следовательно, значение x_i, при котором $|x_i - m_x|$ велико, должно иметь малую вероятность. Другими словами, при малой дисперсии большие отклонения с. в. X от ее м. о. m_x маловероятны. Равенство $D(X) = 0$ означает, что $X \neq m_x$ для тех значений x_i, вероятность p_i которых равна нулю. Иначе говоря, $D(x) = 0$ означает, что $X = m_x$ с вероятностью, равной единице.

Пример 5. Найти дисперсию с. в. X, заданной законом распределения вероятностей

X	2	3	55
p	0,1	0,6	0,3

□ Находим м. о.: $m_x = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}6 + 5 \cdot 0{,}3 = 3{,}5$. Так как закон распределения с. в. X^2 имеет вид

X^2	4	9	25
p	0,1	0,6	0,3

то $M(X^2) = 4 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}6 + 25 \cdot 0{,}3 = 13{,}3$, и по формуле (18.118) $D(X) = 13{,}3 - (3{,}5)^2 = 1{,}05$.

Пример 6. Дискретная с. в. может принимать два значения: $X = x_1$ и $X = x_2$, $x_1 < x_2$. Найти закон распределения с. в. X, если $P(X = x_1) = 0{,}2$, $M(X) = 3{,}8$, $D(X) = 0{,}16$.

□ Так как с. в. X принимает только два значения: x_1 и x_2, то вероятность $P(X = x_2) = 1 - p = 0{,}8 = q$. Отсюда и из условия задачи получаем соотношения:

$$M(X) = x_1 p + x_2 q = 0{,}2x_1 + 0{,}8x_2 = 3{,}8;$$
$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = x_1^2 p + x_2^2 q - 3{,}8^2 = 0{,}2x_1^2 + 0{,}8x_2^2 - 3{,}8^2 = 0{,}16.$$

Таким образом, получили систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 4x_2 = 19; \\ x_1^2 + 4x_2^2 = 73 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 3; \\ x_2 = 4 \end{array}\right\} \cup \left\{\begin{array}{l} x_1 = 4{,}6; \\ x_2 = 3{,}6. \end{array}\right.$$

Условию $x_1 < x_2$ удовлетворяет решение $x_1 = 3$, $x_2 = 4$. Поэтому искомый закон распределения имеет вид

X	3	4
p	0,2	0,8

Пример 7. Найти дисперсию с. в. X, функция распределения которой

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \dfrac{3}{4}x^2 - \dfrac{1}{4}x^3, & 0 \leqslant x \leqslant 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

□ Находим плотность вероятностей

$$f(X)=F'(x)=\begin{cases}0, & x<0,\ x>2;\\ \frac{3}{2}x-\frac{3}{4}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$$

Далее,

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int\limits_{0}^{2}x\left(\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}x^2\right)dx=1;$$

$$M(X^2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\int\limits_{0}^{2}x^2\left(\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}x^2\right)dx=\frac{6}{5}.$$

По формуле (18.117) искомая дисперсия $D(X)=M(X^2)-M^2(X)=\frac{6}{5}-1=\frac{1}{5}$.

Установим свойства дисперсии.

1°. Дисперсия постоянной неслучайной величины равна нулю. Действительно, $D(C)=M(C^2)-M^2(C)=C^2-C^2=0$.

2°. Постоянный неслучайный множитель C можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат: $D(CX)=C^2D(X)$.

В самом деле,

$$D(CX)=M((CX)^2)-M^2(CX)=C^2M(X^2)-C^2M^2(X)=$$
$$=C^2(M(X^2)-M^2(X))=C^2D(X).$$

3°. Дисперсия суммы или разности независимых с. в. X и Y равна сумме дисперсий этих величин: $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$.

□ Так как X и Y независимые с. в., то $M(XY)=M(X)M(Y)$ и, следовательно,

$$D(X+Y)=M((X+Y)^2)-M^2(X+Y)=M(X^2+2XY+Y^2)-$$
$$-(M(X)+M(Y))^2=M(X^2)+2M(X)M(Y)+M(Y^2)-M^2(X)-$$
$$-2M(X)M(Y)-M^2(Y)=(M(X^2)-M^2(X))+(M(Y^2)-M^2(Y))=$$
$$=D(X)+D(Y).$$

Итак, $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$. Отсюда и из свойства 2° дисперсии получим $D(X-Y)=D(X)+D(-Y)=D(X)+(-1)^2D(Y)=$ $=D(X)+D(Y)$. ■

Математическое ожидание и дисперсия основных законов распределения с. в. Найдем м. о. и дисперсию некоторых законов распределения.

1. Для *биномиального закона распределения* $P_n(m)=C_n^mp^mq^{n-m}$. Здесь $P_n(m)$ — вероятность числа X — появлений события m раз в серии из n независимых испытаний, p — вероятность появления события в одном испытании, $q=1-p$. По формулам (18.107) и (18.113)

$$M(X)=\sum_{m=0}^{n}mP_n(m)=\sum_{m=0}^{n}mC_n^mp^mq^{n-m};$$

$$D(X)=\sum_{m=0}^{n}m^2p^m-m_x^2=\sum_{m=0}^{n}m^2C_n^mp^mq^{n-m}-m_x^2. \qquad (18.119)$$

Для вычисления этих сумм воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$(pt+q)^n=\sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m t^m q^{n-m}.$$

Продифференцировав равенство по t, получим

$$np(tp+q)^{n-1}=\sum_{m=1}^{n} mC_n^m p^m q^{n-m} t^{m-1}. \qquad (18.120)$$

Из соотношения (18.120) при $t=1$ с учетом равенства $p+q=1$ будем иметь

$$np=\sum_{m=1}^{n} mC_n^m p^m q^{n-m}=\sum_{m=0}^{n} mC_n^m p^m q^{n-m}.$$

Отсюда и из первого равенства (18.119) следует, что м. о.

$$M(X)=\sum_{m=0}^{n} mC_n^m p^m q^{n-m}=np=m_x. \qquad (18.121)$$

Далее, дифференцируя равенство (18.120) по t, получаем

$$n(n-1)p^2(pt+q)^{n-2}=\sum_{m=2}^{n} m(m-1)C_n^m p^m q^{n-m} t^{m-2}.$$

Отсюда при $t=1$, $(p+q=1)$, согласно формуле (18.121), имеем:

$$n(n-1)p^2=\sum_{m=2}^{n} m(m-1)C_n^m p^m q^{n-m}=\sum_{m=0}^{n} m(m-1)\times$$

$$\times C_n^m p^m q^{n-m}=\sum_{m=0}^{n} m^2 C_n^m p^m q^{n-m}-\sum_{m=0}^{n} mC_n^m p^m q^{n-m}=$$

$$=\sum_{m=0}^{n} m^2 C_n^m p^m q^{n-m}-np.$$

Таким образом, $n(n-1)p^2+np=\sum_{m=0}^{n} m^2 C_n^m p^m q^{n-m}$. Из этого соотношения, согласно второму равенству (18.119), и так как $m_x=np$, получим

$$D(X)=\sum_{m=0}^{n} m^2 C_n^m p^m q^{n-m}-m_x^2=n(n-1)p^2+$$
$$+np-(np)^2=np(1-p)=npq.$$

Итак, для биномиального закона распределения вероятностей дисперсия

$$D(X)=\sum_{m=0}^{n} m^2 C_n^m p^m q^{n-m}-m_x^2=npq. \qquad (18.122)$$

2. Найдем м. о. и дисперсию закона *распределения Пуассона:*

$$p_m=P(X=m)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},\ m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

где λ — параметр распределения.

Имеем

$$M(X)=\sum_{m=0}^{\infty} m\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda.$$

Далее, с учетом равенства $m^2=m(m-1)+m$ получаем

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=\sum_{m=0}^{\infty} m^2\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}-\lambda^2=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m(m-1)}{m!}\lambda^m e^{-\lambda}+\sum_{m=0}^{\infty} m\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}-\lambda^2=$$

$$=\lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\lambda^{m-2}}{(m-2)!}+\lambda e^{-\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}-\lambda^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda.$$

Итак, выяснен смысл параметра λ распределения Пуассона: $M(X)=D(X)=\lambda$.

3. Для *равномерного распределения* с. в. X с плотностью вероятностей

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b;\\ 0, & x<a,\ x>b\end{cases}$$

имеем:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_{a}^{b}\frac{xdx}{b-a}=\frac{a+b}{2};$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=\int_{a}^{b}\frac{x^2dx}{b-a}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

4. Для *нормального распределения* $N(m, \sigma)^2)$ с. в. X с плотностью вероятностей

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

имеем

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-(x-m)^2/2\sigma^2}dx=$$

$$=\left|\frac{x-m}{\sigma}=t\right|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(m+\sigma t)e^{-t^2/2}dt=\frac{m}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/2}dt+$$

$$+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2/2}dt.$$

Согласно формуле (7.41), ч. II, первый интеграл в правой части этого равенства равен $\sqrt{2\pi}$. Второй же интеграл равен нулю как интеграл от нечетной функции по бесконечному симметричному промежутку. Таким образом, для нормального распределения $N(m, \sigma^2)$ имеем $M(X) = m$.

Далее, по формуле (18.113)

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(x))^2 f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} dx =$$

$$= \left| \frac{x-m}{\sigma} = t \right| = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2/2} dt = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t d(e^{-t^2/2}) =$$

$$= -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} te^{-t^2/2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \sigma^2.$$

Итак, смысл параметров m и σ нормального распределения $N(m, \sigma^2)$ с. в. X следующий: $m = M(X)$, $\sigma^2 = D(X)$.

5. Для *экспоненциального закона распределения* с. в. X с плотностью вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \ \lambda > 0 \end{cases}$$

будем иметь:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{\infty} xe^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda};$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \lambda \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Мода и медиана с. в. *Модой дискретной с. в.* называется ее наиболее вероятное значение, т. е. значение, вероятность которого наибольшая. *Модой непрерывной с. в.* называется ее значение, при котором плотность вероятностей распределения с. в. максимальная. Будем обозначать моду с. в. X через $\mathrm{Mo}(X)$.

Медианой с. в. X называется такое ее значение $\mathrm{Me}(X)$, для которого

$$P(X \leqslant \mathrm{Me}(X)) \geqslant 0{,}5; \ P(X \geqslant \mathrm{Me}(X)) \geqslant 0{,}5. \qquad (18.123)$$

Если известна функция распределения $F(x)$ с. в. X, то очевидно, что медиана $\mathrm{Me}(X)$ есть решение (любое) уравнения $F(x) = 0{,}5$. Медиана может быть не единственной. За медиану $\mathrm{Me}(X)$ принимают любую точку, в которой функция $F(x)$ переходит от значений, меньших 0,5, к значениям, большим 0,5: $F(\mathrm{Me}(X)) \leqslant 0{,}5$, $F(\mathrm{Me}(X) + 0) \geqslant 0{,}5$.

Геометрически мода Мо является абсциссой той точки кривой

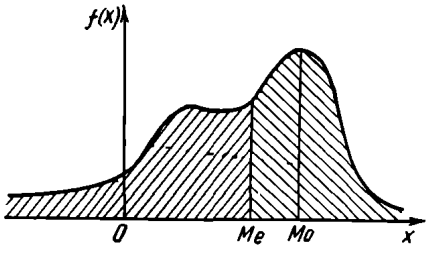


Рис. 18.18

распределения с. в. (непрерывной), ордината которой максимальна. Аналогично медиану Me можно истолковать как точку, в которой ордината делит пополам площадь, ограниченную кривой плотности распределения (рис. 18.18). Для нормального распределения $N(m, \sigma^2)$

$$\mathrm{Mo}(X) = \mathrm{Me}(X) = m = M(X).$$

Пример 8. Найти моду и медиану дискретной с. в., распределенной по закону

X	10	20	30	40
p	0,2	0,15	0,25	0,4

□ Из таблицы видно, что наибольшую вероятность имеет значение $X = 40$, т. е. $\mathrm{Mo}(X) = 40$.

Для значения $X = 30$ имеем $P(X \leqslant 30) = 0{,}6 \geqslant 0{,}5$ и $P(X \geqslant 30) = 0{,}65 \geqslant 0{,}5$. Отсюда и из соотношений (18.123) получаем, что $\mathrm{Me}(X) = 30$. Из графика функции распределения $F(x)$ этой с. в. X (рис. 18.19) следует, что $F(30) < 0{,}5$ и $F(30 + 0) > 0{,}5$.

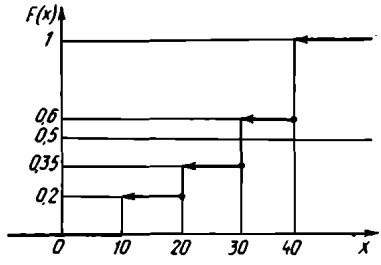


Рис. 18.19

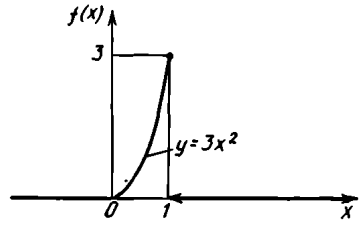


Рис. 18.20

Пример 9. Найти моду и медиану с. в. X, если плотность вероятностей ее

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x \leqslant 1; \\ 0, & x \leqslant 0,\ x > 1. \end{cases}$$

□ График $f(x)$ изображен на рис. 18.20. Так как $\max f(x) = 3$ при $x = 1$, то $\mathrm{Mo}(X) = 1$.

Для нахождения медианы $\mathrm{Me}(X)$ решим уравнение $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{2}$, т. е. $\int\limits_{0}^{x} 3t^2 dt = 1/2 \Rightarrow (x^3 = 1/2) \Rightarrow (x = \sqrt[3]{1/2})$. Следовательно, $\mathrm{Me}(X) = 1/\sqrt[3]{2}$.

Моменты с. в. Математическое ожидание случайной величины есть ее среднее значение, в физическом смысле оно определяет центр тяжести графика закона распределения или плотности; дисперсия характеризует разброс с. в. относительно ее среднего значения;

мода и медиана характеризуют положение с. в. Кроме этих величин, для более детальной характеристики с. в. вводятся моменты с. в. различных порядков, начальные и центральные.

Начальным моментом k-го порядка ν_k с. в. X называется м. о. величины X^k:

$$\nu_k = M(X^k), \quad k = 0, 1, \ldots \tag{18.124}$$

При $k = 1$ получаем $\nu_1 = M(X)$, т. е. *математическое ожидание с. в. X есть начальный момент первого порядка.*

Из определения математического ожидания с. в. следует, что начальный момент k-го порядка (18.124) определяется:

для дискретной с. в. равенством

$$\nu_k = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k p_i, \tag{18.125}$$

а для непрерывной с. в. равенством

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx, \tag{18.126}$$

где $f(x)$ — плотность вероятностей с. в. X.

Покажем, что если существует начальный момент k-го порядка, то существуют начальные моменты до $k-1$-го порядка включительно.

В самом деле, по определению математического ожидания с. в. X^k интеграл (18.126) сходится абсолютно, т. е. $\int_{-\infty}^{\infty} |x^k f(x)|dx < +\infty$. Учитывая, что при $|x| > 1$ выполняется неравенство $|x^{k-1}f(x)| \leqslant |x^k f(x)|$, получаем оценку

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} x^{k-1}f(x)dx\right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |x^{k-1}f(x)|dx = \int_{-\infty}^{-1} |x^{k-1}f(x)|dx + \int_{-1}^{1} |x^{k-1}f(x)|dx + \int_{1}^{\infty} |x^{k-1}f(x)|dx \leqslant \int_{-\infty}^{-1} |x^k f(x)|dx + \int_{1}^{\infty} |x^k f(x)|dx + \int_{-1}^{1} |x^{k-1}f(x)|dx < +\infty,$$

что и доказывает существование момента $k-1$-го порядка.

Центральным моментом k-го порядка μ_k называется м. о. величины $(X - M(X))^k = (X^0)^k$, т. е.

$$\mu_k = M((X - M(X))^k) = M((X^0)^k), \quad k = 0, 1, 2 \ldots \tag{18.127}$$

Отсюда следует, что $\mu_0 = M(1) = 1$, $\mu_1 = M(X - M(X)) = M(X) - M(X) = 0$, $\mu_2 = M((X - M(X))^2) = D(X)$, т. е. *второй центральный момент с. в. X равен дисперсии этой с. в.*

Из определения математического ожидания с. в. следует, что центральный момент k-го порядка (18.127) для дискретной с. в. определяется равенством

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - m_x)^k p_i, \quad m_x = M(X), \tag{18.128}$$

а для непрерывной с. в.— равенством

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k f(x)dx, \tag{18.129}$$

где $f(x)$ — плотность вероятностей с. в. X.

Получим соотношения между начальными и центральными моментами различных порядков.

Так как $(x - m_x)^k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i x^{k-i} m_x^i$, то из равенства (18.129) имеем

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i x^{k-i} m_x^i \right) f(x)dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i m_x^i \int_{-\infty}^{\infty} x^{k-i} f(x)dx = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i \nu_{k-i} m_x^i,$$

т. е.

$$\mu_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i \nu_{k-i} m_x^i, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Отсюда последовательно имеем:

$\mu_0 = 1$;
$\mu_1 = 0 = \nu_1 - m_x$;
$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = \nu_2 - m_x^2$;
$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3 = \nu_3 - 3m_x\nu_2 + 2m_x^3$;
. . . . . .

Ковариация с. в. *Ковариацией* или *корреляционным моментом* с. в. X и Y называется величина $\sigma_{xy} = \operatorname{cov}(X, Y) = M(X^0 Y^0)$, т. е.

$$\sigma_{xy} = M((X - M(X))(Y - M(Y))) = M((X - m_x)(Y - m_y)), \tag{18.130}$$

где $m_x = M(X)$; $m_y = M(Y)$.

Преобразуем правую часть равенства (18.130):

$$\sigma_{xy} = M(XY - m_x Y - m_y X + m_x m_y) =$$
$$= M(XY) - m_x M(Y) - m_y M(X) + m_x m_y = M(XY) - m_x m_y.$$

Итак,

$$\sigma_{xy} = M(XY) - m_x m_y. \tag{18.131}$$

Если известна совместная плотность вероятностей непрерывных с. в. X и Y, то, согласно определению (18.130), корреляционный момент

$$\sigma_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y)dxdy \tag{18.132}$$

или с учетом формулы (18.131)

$$\sigma_{xy}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,\ y)dxdy-m_xm_y. \tag{18.133}$$

Для дискретных с. в. X и Y с совместным законом распределения $P(X=x_i,\ Y=y_j)$ формулы (18.132) и (18.133) имеют вид:

$$\sigma_{xy}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(x_i-m_x)(y_j-m_y)p_{ij}; \tag{18.134}$$

$$\sigma_{xy}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}x_iy_jp_{ij}-m_xm_y \tag{18.135}$$

соответственно.

Отметим свойства корреляционного момента.

1°. $\sigma_{xy}=\sigma_{yx}$. 2°. $\sigma_{xx}=D(X)=\sigma_x^2$.

Свойства 1°—2° следуют из определения ковариации.

3°. Если X и Y независимые с. в., то $\sigma_{xy}=0$.

Это следует из равенства (18.131) и равенства $M(XY)=m_xm_y$ для независимых с. в. X и Y.

4°. Имеет место неравенство Коши — Буняковского:

$$|\sigma_{xy}|\leqslant\sigma_x\sigma_y, \tag{18.136}$$

где $\sigma_x=\sqrt{D(X)}$ и $\sigma_y=\sqrt{D(Y)}$ — среднеквадратические отклонения.

□ Для центрированных с. в. $X^0=X-m_x$ и $Y^0=Y-m_y$ рассмотрим очевидное неравенство

$$M((X^0-\lambda Y^0)^2)\geqslant 0\Leftrightarrow M(X^{0^2}-2\lambda M(X^0Y^0)+\lambda^2M(Y^{0^2})\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow D(X)-2\lambda\sigma_{xy}+\lambda^2D(Y)\geqslant 0.$$

Из последнего неравенства следует, что дискриминант этого квадратного трехчлена от λ должен быть неположительным, т. е. $\sigma_{xy}^2-D(X)D(Y)\leqslant 0$, откуда и вытекает неравенство (18.136). ■

Пример 10. Совместное распределение с. в. X и Y определяется законом

Y \ X	-1	0	1	p_Y
0	$1/12$	$1/2$	$1/12$	$2/3$
2	$1/12$	$1/6$	$1/12$	$1/3$
p_X	$1/6$	$2/3$	$1/6$	

Найти ковариацию σ_{xy}.

□ Находим математическое ожидание с. в. X и Y:

$$m_x=(-1)\frac{1}{6}+0\cdot\frac{2}{3}+1\cdot\frac{1}{6}=0;\quad m_y=0\cdot\frac{2}{3}+2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

Согласно формуле (18.135), ковариация

$$\sigma_{xy} = M(XY) - m_x m_y = 0(-1)\frac{1}{12} + 0\cdot 0\cdot\frac{1}{12} + 0\cdot 1\cdot\frac{1}{12} +$$
$$+ 2(-1)\frac{1}{12} + 2\cdot 0\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot 1\cdot\frac{1}{12} - 0\cdot\frac{2}{3} = 0.$$

Однако $P(X<0)=\frac{1}{6}$, $P(Y<2)=\frac{2}{3}$, $P(X<0,\ Y<2)=\frac{1}{12}\neq\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{9}$. Таким образом, хотя $\sigma_{xy}=0$, с. в. X и Y зависимы.

Пример 11. Совместная плотность вероятностей с. в. X и Y имеет вид

$$f(x,\ y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin(x+y),\ 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2};\\ 0 \text{ в остальных точках.}\end{cases}$$

Найти корреляционный момент σ_{xy}.

□ По формуле (18.114) найдем м. о. m_x:

$$m_x=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\sin(x+y)dxdy=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/2}xdx\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin(x+y)dy=\frac{\pi}{4}.$$

Аналогично получим $m_y=\pi/4$. Находим $M(XY)$ по формуле (18.113):

$$M(XY)=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/2}\int\limits_{0}^{\pi/2} xy\sin(x+y)dxdy=\frac{\pi}{2}-1.$$

По формуле (18.131) $\sigma_{xy}=\frac{\pi}{2}-1-\frac{\pi^2}{16}=\frac{8\pi-16-\pi^2}{16}$.

Коэффициент корреляции. Ковариацию σ_{xy} можно рассматривать как показатель зависимости частного вида для с. в. X и Y. Если X и Y независимые с. в., то $\sigma_{xy}=0$. Но неравенство $\sigma_{xy}\neq 0$ не обязательно означает, что с. в. X и Y независимы (см. пример 10).

Пример 12. Плотность вероятностей с. в. X имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos x,\ x\in[-\pi/2,\ \pi/2];\\ 0,\qquad x\notin[-\pi/2,\ \pi/2].\end{cases}$$

Найти корреляционный момент с. в. X и $Y=X^2$.

□ Нетрудно получить $m_x=0$, $M(XY)=M(X^3)=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}x^3\cos x dx=0$. По формуле (18.131) найдем $\sigma_{xy}=0$.

Итак, $\sigma_{xy}=0$, но ясно, что X и $Y=X^2$ зависимые с. в.

Из примера видно, что ковариация σ_{xy} не отражает полностью характер зависимости с. в. X и Y. За характеристику зависимости с. в. X и Y принимается коэффициент

$$r_{xy}=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{\sigma_{xy}}{\sqrt{D(X)D(Y)}},\qquad (18.137)$$

называемый *коэффициентом корреляции.*

Зависимость между с. в. X и Y, характеризуемая коэффициентом корреляции (18.137), называется *корреляцией.* Случайные величины X и Y называются *некоррелированными*, если $r_{xy}=0$, что равно-

сильно равенству $\sigma_{xy} = \operatorname{cov}(X, Y) = 0$. Если же $r_{xy} \neq 0$, то с. в. X и Y называются *коррелированными*.

Приведем основные свойства коэффициента корреляции.

1°. $r_{xx} = 1$. 2°. $r_{xy} = r_{yx}$. 3°. $|r_{xy}| \leqslant 1$.

4°. Если X и Y независимые с. в., то $r_{xy} = 0$.

Эти свойства следуют непосредственно из определений коэффициента корреляции (18.137), ковариации (18.130) и ее свойств.

5°. $|r_{xy}| = 1$ тогда и только тогда, когда $Y = aX + b$, где a и b — некоторые постоянные. Другими словами, если $|r_{xy}| = 1$, то между с. в. X и Y существует линейная функциональная зависимость (за исключением, быть может, тех значений X, которые принимаются с нулевой вероятностью).

Действительно, пусть $X^* = (X - m_x)/\sigma_x$, $Y^* = (Y - m_y)/\sigma_y$. Тогда $M(X^*) = M(Y^*) = 0$ и, значит,

$$D(X^* \pm Y^*) = M((X^* \pm Y^*)^2) = M\left(\left(\frac{X - m_x}{\sigma_x} \pm \frac{Y - m_y}{\sigma_y}\right)^2\right) =$$

$$= M\left(\left(\frac{X - m_x}{\sigma_x}\right)^2\right) \pm 2M\left(\frac{X - m_x}{\sigma_x} \cdot \frac{Y - m_y}{\sigma_y}\right) + M\left(\left(\frac{Y - m_y}{\sigma_y}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{D(X)}{\sigma_x^2} \pm 2\,\frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{D(Y)}{\sigma_y^2} = 2 \pm 2r_{xy} = 2(1 \pm r_{xy}).$$

Левая часть этого равенства не может быть отрицательной, следовательно, $|r_{xy}| \leqslant 1$. Для $r_{xy} = 1$ необходимо, чтобы $D(X^* - Y^*) = 0$, а это значит, что с. в. $X^* - Y^*$ принимает только одно значение с вероятностью, равной единице. В этом случае $X^* - Y^* = \text{const}$, и, следовательно, $Y = aX + \text{const}$, где $a = \sigma_y/\sigma_x$. Аналогично рассматривается случай, когда $r_{xy} = -1$.

Замечание. Еще раз отметим, что если X и Y — независимые с. в., то они некоррелированные, т. е. (X, Y — независимые с. в.) $\Rightarrow$ (X, Y — некоррелированные с. в.). Обратное утверждение неверно. Как показывают примеры 11 и 12, из некоррелированности с. в. не следует их независимость. В § 18.11 (свойство 1°) будет показано, что для с. в. X и Y, распределенных по нормальному закону, эти понятия эквивалентны, т. е. для таких с. в. (X, Y — независимые с. в.) $\Leftrightarrow$ (X, Y — некоррелированные с. в.).

Задачи и упражнения

1. С. в. X распределена по закону

X	-1	0	1
p	0,2	0,3	0,5

Найти $M(X^4)$ и $D(X^4)$.

2. С. в. X распределена с плотностью вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} x/6 + 1/3, & 0 \leqslant x \leqslant 2; \\ 0, & x < 0,\ x > 2. \end{cases}$$

Найти $M(X)$, $M(X^2)$, $D(X)$ и σ_x.

3. Показать, что для с. в., нормально распределенных по закону $N(m, \sigma^2)$, м. о. $M(|X-m|)=\sqrt{2\sigma/\pi}$.

4. Показать, что с. в. X, распределенная по *закону Коши* с плотностью вероятностей

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\,\frac{b}{b^2+(x-a)^2},$$

не имеет математического ожидания и дисперсии.

5. Найти моду, медиану и м. о. случайной величины X с плотностью вероятностей

$$f(x)=\begin{cases}-3x^2/4+9x/2-6, & x\in[2,4];\\ 0, & x\notin[2,4].\end{cases}$$

6. Закон распределения с. в. X и Y имеет вид

X \ Y	-1	0	1	p_X
-2	0,15	0,35	0,05	0,55
3	0,10	0,25	0,10	0,45
p_Y	0,25	0,60	0,15	1

Найти корреляционный момент этих величин.

7. Показать, что $\min\limits_{a\in\mathbb{R}} M((x-a)^2)=D(X)$.

18.8. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЕКТОРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Математическое ожидание двумерной с. в. Математическим ожиданием двумерной с. в. $\mathbf{Z}=(X, Y)$ называется вектор

$$\mathbf{M(Z)}=(M(X),\ M(Y))=(m_x, m_y), \tag{18.138}$$

где m_x и m_y — м. о. случайных величин X и Y соответственно. Для непрерывных с. в. X и Y м. о. m_x и m_y определяются по формулам (18.114), а для дискретных с. в. с совместным законом распределения $p_{ij}=P(X=x_i,\ Y=y_j)$ — по формулам:

$$m_x=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}x_ip_{ij};\quad m_y=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}y_jp_{ij}.$$

Условное математическое ожидание. Условное м. о. $M_X(X\mid Y=y)$ с. в. X при условии, что с. в. $Y=y$, определяется соотношением

$$M_X(X\mid Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x\mid Y=y)dx, \tag{18.139}$$

где $f_X(x\mid Y=y)$ — условная плотность вероятностей с. в. X при условии, что с. в. $Y=y$.

Если $\varphi(X)$ — функция с. в. X, то условное м. о. случайной величины $\varphi(X)$ при условии, что $Y=y$, определяется равенством

$$M_X(\varphi(X)\mid Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f_X(x\mid Y=y)dx. \qquad (18.140)$$

Если X и Y — дискретные с. в., то условное м. о.

$$M_X(X\mid Y=y)=\sum_{i=1}^{\infty}x_iP(x_i\mid Y=y_j). \qquad (18.141)$$

Пример 1. Двумерная с. в. определена законом распределения

X \ Y	-1	0	1
-2	0,15	0,35	0,05
3	0,10	0,25	0,10

Найти условное м. о. $M_X(X\mid Y=1)$.

□ По формуле (18.141) искомое м. о. $M_X(X\mid Y=1)=-2\cdot 0{,}05+3\cdot 0{,}10=0{,}20$.

Пример 2. Найти условное м. о. $M_Y(Y\mid X=0)$ для двумерной с. в. с совместной плотностью вероятностей

$$f(x,\ y)=\begin{cases}10e^{-(5x+2y)}, & x\geqslant 0,\ y\geqslant 0;\\ 0, & x<0,\ y<0.\end{cases}$$

□ По аналогии с формулой (18.139)

$$M_Y(Y\mid X=0)=\int_0^{\infty}yf_Y(y\mid X=0)\,dy. \qquad (18.142)$$

По формуле (18.94) находим

$$f_Y(y\mid X=0)=\frac{f(0,\ y)}{f_X(0)}=\frac{f(0,\ y)}{\int\limits_0^{\infty}f(0,\ y)dy}=\frac{10e^{-2y}}{\int\limits_0^{\infty}10e^{-2y}dy}=2e^{-2y}.$$

Подставив это значение в формулу (18.142), получим

$$M_Y(Y\mid X=0)=2\int_0^{\infty}ye^{-2y}dy=0{,}5.$$

Выясним свойства условных м. о.

1°. $M_X(\varphi(X)\mid X=x)=\varphi(x)$.

2°. $M_X(\alpha X\mid Y=y)=\alpha M_X(X\mid Y=y)$, $\forall\,\alpha\in\mathbf{R}$.

3°. $M_{X+Y}(X+Y\mid Z=z)=M_X(X\mid Z=z)+M_Y(Y\mid Z=z)$.

Свойства 1° — 3° доказываются так же, как и аналогичные свойства м. о. скалярных с. в.

4°. $M_Y(M_X(X|Y=y))=M_X(X)=M(X)=m_x.$ (18.143)

□ По определению условного м. о.

$$M_Y(M_X(X|Y=y))=\int\limits_{-\infty}^{\infty}M_X(X|Y=y)f_Y(y)dy=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}xf_X(x|Y=y)f_Y(y)dxdy.$$

Но по формуле Байеса $f_X(x|Y=y)f_Y(y)=f(x,\ y)=f_Y(y|X=x)f_X(x)$. Поэтому

$$M_Y(M_X(X|Y=y))=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)f_Y(y|X=x)dxdy=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_Y(y|X=x)dy=m_x,$$

так как

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_Y(y|X=x)dy=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x,\ y)}{f_X(x)}\,dy=\frac{1}{f_X(x)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,\ y)dy=\frac{f_X(x)}{f_X(x)}=1.\ \blacksquare$$

Ковариационная матрица двумерной с. в. *Ковариационной матрицей* случайного вектора $\mathbf{Z}=(X,\ Y)$ называется матрица

$$K(\mathbf{Z})=K(X,\ Y)=\begin{bmatrix}\sigma_x^2 & \sigma_{xy}\\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2\end{bmatrix}. \qquad (18.144)$$

где $\sigma_{xy}=\operatorname{cov}(X,\ Y)$; $\sigma_x^2=D(X)$; $\sigma_y^2=D(Y)$.

Обозначим $\mathbf{Z}^{0T}=(X^0,\ Y^0)$, где $X^0=X-m_x$, $Y^0=Y-m_y$ — центрированные с. в. Тогда

$$K(\mathbf{Z})=\begin{bmatrix}M(X^{0^2}) & M(X^0Y^0)\\ M(X^0Y^0) & M(Y^{0^2})\end{bmatrix}.$$

Так как

$$\mathbf{Z}^0\mathbf{Z}^{0T}=\begin{pmatrix}X^0\\ Y^0\end{pmatrix}(X^0Y^0)=\begin{bmatrix}X^{0^2} & X^0Y^0\\ X^0Y^0 & Y^{0^2}\end{bmatrix},$$

то отсюда и из определения (18.144) следует, что $K(\mathbf{Z})=M(\mathbf{Z}^0\mathbf{Z}^{0T})$.

Ковариационная матрица $K(\mathbf{Z})$ обладает следующими свойствами.

1°. Матрица K симметричная, неотрицательно-определенная.

□ Симметричность матрицы K следует из того, что $\sigma_{xy}=\sigma_{yx}$. Неотрицательная определенность вытекает из критерия Сильвестра, так как $\sigma_x^2\geqslant 0$ и $(\sigma_x\sigma_y)^2-\sigma_{xy}^2\geqslant 0$ в силу неравенства Коши — Буняковского (18.136).

2°. Если $\mathbf{V}=A\mathbf{Z}+\mathbf{b}$, где A — квадратная 2×2-матрица с постоянными элементами, $\mathbf{b}=(b_1,\ b_2)^T$ — постоянный вектор, то

$$K(\mathbf{V})=AK(\mathbf{Z})A^T. \qquad (18.145)$$

Это свойство будет доказано в общем виде несколько позднее (см. формулу (18.147)).

3°. С. в. X и Y некоррелированные тогда и только тогда, когда ковариационная матрица (18.144) имеет диагональный вид:

$$K(X,\ Y)=\begin{bmatrix}\sigma_x^2 & 0\\ 0 & \sigma_y^2\end{bmatrix}.$$

Это следует из того, что для некоррелированных с. в. X и Y $\operatorname{cov}(X,\ Y)=\sigma_{xy}=0$.

4°. Ковариационную матрицу можно записать в виде

$$K(X,\ Y)=\begin{bmatrix}M(X^2) & M(XY)\\ M(XY) & M(Y^2)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}m_x^2 & m_xm_y\\ m_xm_y & m^2y\end{bmatrix}. \qquad (18.146)$$

Это следует из равенств $\sigma_x^2=M(X^2)-m_x^2$, $\sigma_y^2=M(Y^2)-m_y^2$, $\sigma_{xy}=\sigma_{yx}=M(XY)-m_xm_y$.

Пример 3. Совместная плотность вероятностей с. в. X и Y

$$f(x,\ y)=\begin{cases}4xye^{-(x^2+y^2)}, & x\geqslant 0;\ y\geqslant 0;\\ 0, & x<0;\ y<0.\end{cases}$$

Найти ковариационную матрицу $K(X,\ Y)$.

□ По формуле (7.41), ч. II, находим м. о.:

$$M(X)=\int_0^\infty\int_0^\infty xf(x,\ y)dxdy=4\int_0^\infty x^2e^{-x^2}dx\int_0^\infty ye^{-y^2}dy=-\int_0^\infty xd(e^{-x^2})=$$

$$=-xe^{-x^2}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}/2.$$

Аналогично $M(Y)=\sqrt{\pi}/2$. Далее

$$M(X^2)=M(Y^2)=4\int_0^\infty\int_0^\infty x^3ye^{-(x^2+y^2)}dxdy=1;$$

$$M(XY)=4\int_0^\infty\int_0^\infty x^2y^2e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\pi/4.$$

По формуле (18.146) искомая ковариационная матрица

$$K(X,\ Y)=\begin{bmatrix}1 & \pi/4\\ \pi/4 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\pi/4 & \pi/4\\ \pi/4 & \pi/4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-\pi/4 & 0\\ 0 & 1-\pi/4\end{bmatrix}.$$

Следовательно, с. в. X и Y некоррелированные. Более того, как следует из вида $f(x,\ y)$, они независимые, так как

$$f(x,\ y)=2xe^{-x^2}\cdot 2ye^{-y^2}=f_X(x)f_Y(y).$$

Матрица

$$R(X,\ Y)=\begin{bmatrix}1 & r_{xy}\\ r_{xy} & 1\end{bmatrix}$$

называется *корреляционной матрицей* с. в. X и Y. Ясно, что если с. в. X и Y некоррелированные, то их корреляционная матрица равна единичной матрице E. Отсюда, если $R(X,\ Y)\neq E$, то это означает, что с. в. X и Y коррелированные, т. е. между ними существует некоторая зависимость.

Пример 4. Найти корреляционную матрицу для с. в. (X, Y), если совместная плотность вероятностей

$$f(x, y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin(x+y), & 0\leqslant x\leqslant \pi/2,\ 0\leqslant y\leqslant \pi/2;\\ 0 & \text{в остальных точках.}\end{cases}$$

□ В примере 11, § 18.7, найдено, что $m_x=m_y=\pi/4$, $\sigma_{xy}=\pi/2-1-\pi^2/16$. Находим дисперсии

$$\sigma_x^2=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}x^2\sin(x+y)dxdy-\frac{\pi^2}{16}=\frac{\pi^2+8\pi-32}{16}=\sigma_y^2.$$

Тогда корреляционная матрица

$$R(X, Y)=\begin{bmatrix}1 & \frac{8\pi-16-\pi^2}{\pi^2+8\pi-32}\\ \frac{8\pi-16-\pi^2}{\pi^2+8\pi-32} & 1\end{bmatrix}.$$

Числовые характеристики многомерных с. в. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — скалярные с. в. Вектор-столбец $\mathbf{X}=(X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$ называется n-мерной векторной с. в. Скалярная функция $F(\mathbf{x})=F(x_1, x_2, \ldots, x_n)=P(X_1<x_1, X_2<x_2, \ldots, X_n<x_n)$, равная вероятности того, что $X_1<x_1$, $X_2<x_2$, ..., $X_n<x_n$ для любых $x_i\in\mathbf{R}$, называется функцией совместного распределения вероятностей с. в. $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Пусть $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\mathbf{b}=(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ — два вектора из $\mathbf{R}^n$, такие, что $a_1\leqslant b_1$, $a_2\leqslant b_2$, ..., $a_n\leqslant b_n$, и пусть события A и B определены соотношениями $A=(X_1<a_1, X_2<a_2, \ldots, X_n<a_n)$, $B=(X_1<b_1, X_2<b_2, \ldots, X_n<b_n)$. Ясно, что $A\subset B$. Отсюда $P(A)\leqslant P(B)$. Это значит, что $F(\mathbf{x})=F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — неубывающая функция по каждому аргументу x_i, $i=1, 2, \ldots, n$.

Если существует функция $f(\mathbf{x})=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, такая, что равенство

$$F(\mathbf{x})=F(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\ldots\int_{-\infty}^{x_n}f(s_1, s_2, \ldots, s_n)ds_1ds_2\cdots ds_n$$

имеет место при любых $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из $\mathbf{R}^n$, то $f(\mathbf{x})$ называется плотностью распределения вероятностей с. в. $\mathbf{X}$ или совместной плотностью распределения с. в. $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Из определения $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ следует, что

1) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\geqslant 0\ \forall\, x_i\in\mathbf{R}$, $i=1, 2, \ldots, n$;

2) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\dfrac{\partial^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1\partial x_2\ldots dx_n}$;

3) выполнено условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1, dx_2\cdots dx_n=1.$$

Пусть $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — совместная функция распределения, а $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — совместная плотность вероятностей с. в. $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Маргинальная функция распределения $F_{X_1}(x_1)$ с. в. X_1 определяется равенством

$$F_{X_1}(x_1)=P(X_1<x_1, X_2<\infty, \ldots, X_n<\infty)=$$
$$=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}f(s_1, x_2, \ldots, x_n)ds_1dx_2\cdots dx_n,$$

а маргинальная плотность вероятностей $f_{X_1}(x_1)$ соотношением

$$f_{X_1}(x_1)=\frac{dF_{X_1}(x_1)}{dx_1}=\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_2\cdots dx_n.$$

Аналогично определяются маргинальные функции распределения и маргинальные плотности вероятностей с. в. $X_2, X_3, \ldots, X_n$.

Математическим ожиданием с. в. $\mathbf{X}$ называется n-мерный вектор $\mathbf{m} = \mathbf{M}(\mathbf{X}) = (M(X_1), M(X_2), \ldots, M(X_n))^T$. Здесь

$$M(X_i) = \int_{-\infty}^{\infty} x_i f_{X_i}(x_i) dx_i = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} x_i f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

является м. о. случайной величины X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть случайный вектор $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)^T$ имеет вид $\mathbf{Y} = A\mathbf{X} + \mathbf{b}$, где $A = [a_{ij}]$ — $m \times n$-матрица с постоянными неслучайными элементами a_{ij}; $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$ — постоянный m-вектор. Покажем, что в этом случае м. о. $\mathbf{M}(\mathbf{Y}) = \mathbf{M}(A\mathbf{X} + \mathbf{b}) = A\mathbf{M}(\mathbf{X}) + \mathbf{b}$.

В самом деле,

$$A\mathbf{X} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j} X_j \\ \ldots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{mj} X_j \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\mathbf{M}(\mathbf{Y}) = \mathbf{M}\begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j} X_j + b_1 \\ \ldots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{mj} X_j + b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j} X_j + b_1 \right) \\ \ldots \\ \mathbf{M}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{mj} X_j + b_m \right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j} M(X_j) + b_1 \\ \ldots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{mj} M(X_j) + b_m \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} M(X_1) \\ \vdots \\ M(X_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = A\mathbf{M}(\mathbf{X}) + \mathbf{b}.$$

Ковариационная матрица $K(X)$ случайного вектора X определяется соотношением

$$K(\mathbf{X}) = M((X - m)(X - m)^T) = M\left(\begin{pmatrix} X_1 - m_1 \\ \vdots \\ X_n - m_n \end{pmatrix} (X_1 - m_1, \ldots, X_n - m_n) \right) =$$

$$= M\left(\begin{bmatrix} (X_1 - m_1)(X_1 - m_1) \ldots (X_1 - m_1)(X_n - m_n) \\ \ldots \\ (X_n - m_n)(X_1 - m_1) \ldots (X_n - m_n)(X_n - m_n) \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} M((X_1 - m_1)(X_1 - m_1)) \ldots M((X_1 - m_1)(X_n - m_n)) \\ \ldots \\ M((X_n - m_1)(X_1 - m_1)) \ldots M((X_n - m_n)(X_n - m_n)) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \ldots & \sigma_{X_1 X_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_{X_n X_1} & \ldots & \sigma_{X_n}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D(X_1) & \operatorname{cov}(X_1, X_2) \ldots \operatorname{cov}(X_1, X_n) \\ \ldots & \ldots \\ \operatorname{cov}(X_n, X_1) \operatorname{cov}(X_n, X_2) & \ldots D(X_n) \end{bmatrix}.$$

Из определения и свойств ковариаций следует, что $K(\mathbf{X})$ — симметричная $n \times n$-матрица. Каждый элемент $\sigma_{X_i X_j}$ ее определяется выражением

$$\sigma_{X_i X_j} = M((X_i - m_i)(X_j - m_j)) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - m_i)(x_j - m_j) f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n,$$

где $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — плотность распределения вероятностей с. в. $\mathbf{X}$.

Покажем, что для ковариационной матрицы $K(\mathbf{X})$ справедливо равенство

$$K(\mathbf{X}) = M(\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^T) - \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}^T,$$

обобщающее формулу (18.146). Здесь

$$M(\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^T) = \begin{bmatrix} M(X_1X_2) & \dots & M(X_1X_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ M(X_nX_1) & \dots & M(X_nX_1) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}^T = \begin{bmatrix} m_1m_2 & \dots & m_1m_n \\ \dots & \dots & \dots \\ m_nm_1 & \dots & m_nm_n \end{bmatrix}$$

являются симметричными $n \times n$-матрицами.

Действительно,

$$K(\mathbf{X}) = M((\mathbf{X} - \mathbf{m})(\mathbf{X} - \mathbf{m})^T) = M((\mathbf{X} - \mathbf{m})(X^T - \mathbf{m}^T)) =$$
$$= M(\mathbf{X}\mathbf{X}^T - \mathbf{m}\mathbf{X}^T - \mathbf{X}\mathbf{m}^T + \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}^T) = M(\mathbf{X}\mathbf{X}^T) - \mathbf{m}\mathbf{M}(\mathbf{X}^T) -$$
$$- M(\mathbf{X})\mathbf{m}^T + \mathbf{m}\mathbf{m}^T = M(\mathbf{X}\mathbf{X}^T) - \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}^T.$$

Покажем теперь, что для постоянных $m \times n$-матрицы A и $\mathbf{m}$-вектора $\mathbf{b}$

$$K(A\mathbf{X} + \mathbf{b}) = AK(\mathbf{X})A^T. \tag{18.147}$$

В самом деле, для вектора $\mathbf{Y} = A\mathbf{X} + \mathbf{b}$ имеем $\mathbf{M}(\mathbf{Y}) = A\mathbf{M}(\mathbf{X}) + \mathbf{b}$, $\mathbf{Y} - \mathbf{M}(\mathbf{Y}) = A\mathbf{X} + \mathbf{b} - A\mathbf{M}(\mathbf{X}) - \mathbf{b} = A(\mathbf{X} - \mathbf{m})$, где $\mathbf{m} = \mathbf{M}(\mathbf{X})$. Отсюда и из определения ковариационной матрицы

$$K(\mathbf{Y}) = M((\mathbf{Y} - \mathbf{M}(\mathbf{Y}))(\mathbf{Y} - \mathbf{M}(\mathbf{Y}))^T = M(A(\mathbf{X} - \mathbf{m})(\mathbf{X} - \mathbf{m})^T A^T) =$$
$$= AM((\mathbf{X} - \mathbf{m})(\mathbf{X} - \mathbf{m})^T)A^T = AK(\mathbf{X})A^T.$$

Из доказанного равенства для $1 \times n$-матрицы $A = (a_1, a_2, \dots, a_n) = \mathbf{a}^T$ и $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ получим соотношение

$$K\left[(a_1, a_2, \dots, a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right] = K(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n) = \mathbf{a}^T K(\mathbf{X})\mathbf{a}.$$

Поскольку ковариация случайной скалярной величины $a_1X_1 + \dots + a_nX_n$ есть ее дисперсия, то последнее равенство можно переписать в виде

$$D(a_1X_1 + \dots + a_nX_n) = \mathbf{a}^T K(\mathbf{X})\mathbf{a}. \tag{18.148}$$

Из равенства (18.148) следует, что дисперсия с. в. $a_1X_2 + \dots + a_nX_n$ представляет собой квадратичную форму от $a_1, a_2, \dots, a_n$ с матрицей $K(\mathbf{X})$ — ковариационной матрицей случайного вектора $\mathbf{X}$. Так как дисперсия всегда неотрицательна, то отсюда следует вывод: *ковариационная матрица $K(\mathbf{X})$ случайного вектора $\mathbf{X}$ всегда неотрицательно определена.*

Можно доказать, что матрица $K(\mathbf{X})$ положительно определена тогда и только тогда, когда не существует постоянного вектора $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ и константы C, таких, что $a_1X_1 + \dots + a_nX_n = C$.

Пример 5. Пусть $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$ — случайный вектор с ковариационной матрицей

$$K(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Найти: *а)* дисперсию с. в. $X_1 - 2X_2 + X_3$; *б)* ковариационную матрицу вектора $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)^T$, где $Y_1 = X_1 + X_2$, $Y_2 = X_1 + X_2 + X_3$.

□ а) Нетрудно видеть, что с. в. $X_1 - 2X_2 + X_3 = (1, -2, 1)(X_1, X_2, X_3)^T$, т. е. $\mathbf{a} = (1, -2, 1)$. Тогда по формуле (18.148) дисперсия

$$D(X_1 - 2X_2 + X_3) = (1, -2, 1)\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 17.$$

б) Представим вектор $\mathbf{Y}$ в виде

$$\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X_1+X_2\\X_1+X_2+X_3\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{pmatrix}=A\mathbf{X},$$

где $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$. Тогда по формуле (18.147)

$$K(\mathbf{Y})=K(A\mathbf{X})=AK(\mathbf{X})A^T=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&2&3\\2&3&0\\3&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12&15\\15&20\end{bmatrix}.$$

Задачи и упражнения

1. Найти условное м. о. $M_X(X\mid Y=0)$, если совместная плотность вероятностей с. в. X и Y равна

$$f(x,\ y)=\begin{cases}6(x-y)^2,\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1;\\ 0\text{ в остальных точках.}\end{cases}$$

2. Найти корреляционную матрицу с. в. X и Y, если совместная плотность вероятностей

$$f(x,\ y)=\begin{cases}axy,&(x,\ y)\in D;\\0,&(x,\ y)\notin D.\end{cases}$$

где D — область, ограниченная прямыми $x+y=1$, $x=0$, $y=0$.

3. Пусть $\mathbf{X}=(X_1,\ X_2,\ X_3)^T$ — случайный вектор и $Y_1=X_1$, $Y_2=X_2-X_1$, $Y_3=X_3-X_2$. Найти $K(\mathbf{Y})$, зная, что X_1, X_2, X_3 — взаимно независимые с. в. с одинаковой дисперсией.

4. Пусть $\mathbf{X}=(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)^T$ и $\mathbf{Y}=(Y_1,\ Y_2,\ \ldots,\ Y_m)^T$ — случайные векторы, для которых $\mathbf{M}(\mathbf{X})=\mathbf{m}_x$, $\mathbf{M}(\mathbf{Y})=\mathbf{m}_y$. Определим взаимную ковариационную матрицу векторов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ равенством

$$\operatorname{cov}(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})=M((\mathbf{X}-\mathbf{m}_x)(\mathbf{Y}-\mathbf{m}_y)^T).$$

Доказать, что $\operatorname{cov}(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})=M(\mathbf{X}\mathbf{Y}^T)-\mathbf{m}_x\cdot\mathbf{m}_y^T$.

18.9. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Характеристической функцией (х. ф.) $\varphi(t)$ скалярной с. в. X называется м. о. случайной величины e^{itX}, $t\in\mathbf{R}$. Если $f(x)$ — плотность вероятностей с. в. X, то по определению

$$\varphi(t)=M(e^{itX})=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}f(x)dx. \tag{18.149}$$

В общем случае $\varphi(t)$ — комплекснозначная функция.

Если X — дискретная с. в. с законом распределения $p_k=P(X=x_k)$, то х. ф.

$$\varphi(t)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{itx_k}p_k. \tag{18.150}$$

Если $\mathbf{Z}=(X,\ Y)$ — двумерный случайный вектор с совместной плотностью вероятностей $f(x,\ y)$, то для него х. ф. определяется равенством

$$\varphi(t,\ s)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(tx+sy)}f(x,\ y)dxdy. \tag{18.151}$$

В случае дискретных с. в. X и Y с совместным законом распределения $p_{kl}=P(X=x_k,\ Y=y_l)$ х. ф. имеет вид

$$\varphi(t,\ s)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}e^{i(tx_k+sy_l)}p_{kl}. \tag{18.152}$$

Из формулы (18.149) следует, что $\varphi(t)$ является преобразованием Фурье функции $f(x)$. Тогда по формуле обратного преобразования Фурье (10.111), ч. III, плотность вероятностей

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{-itx}dt. \tag{18.153}$$

Аналогично закон распределения дискретной с. в. X, согласно формуле (17.76), имеет вид

$$p_k=P(X=x_k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)e^{-itx_k}dt. \tag{18.154}$$

Итак, зная характеристическую функцию с. в. X, по формуле (18.153) или (18.154) можно найти плотность вероятностей или закон распределения этой с. в.

Характеристические функции основных законов распределения. Получим характеристические функции основных законов распределения с. в.

1. *Биномиальный закон.* По формуле (18.150) при $x_k=k$ получаем

$$\varphi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{itk}C_n^kp^kq^{n-k}=\sum_{k=0}^{\infty}C_n^k(pe^{it})^kq^{n-k}=(pe^{it}+q)^n.$$

2. *Равномерный закон распределения.* В этом случае плотность вероятностей $f(x)=1/(b-a)$ при $a<x<b$. По формуле (18.149)

$$\varphi(t)=\int_a^b\frac{e^{itx}}{b-a}dx=\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}.$$

3. *Нормальное распределение* $N(m,\ \sigma^2)$. Для него $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{(2\sigma)^2}}$. Поэтому

$$\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}+itx}dx=\left|\frac{x-m}{\sigma}=z\right|=$$

$$=\frac{e^{itm}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}+it\sigma z}dz=\frac{e^{itm}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(\frac{z^2}{2}-it\sigma z-\frac{\sigma^2t^2}{2}\right)-\frac{\sigma^2t^2}{2}}dz=$$

$$= \frac{e^{itm-\frac{\sigma^2t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{z-i\sigma t}{\sqrt{2}}\right)^2} dz = \left| \frac{z-i\sigma t}{\sqrt{2}} = u \right| =$$

$$= \frac{e^{itm-\frac{\sigma^2t^2}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty-\frac{i\sigma t}{\sqrt{2}}}^{+\infty-\frac{i\sigma t}{\sqrt{2}}} e^{-u^2} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{itm-\frac{\sigma^2t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = e^{itm-\frac{\sigma^2t^2}{2}}.$$

Итак, для нормального закона $N(m, \sigma^2)$ х. ф.

$$\varphi(t) = e^{itm-\sigma^2t^2/2}. \tag{18.155}$$

4. *Закон Пуассона.* В этом случае $p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $\lambda > 0$. Тогда при $x_k = k$ получаем

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} =$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

5. *Экспоненциальный закон распределения.* Для него плотность вероятностей $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $\lambda > 0$, $x > 0$. Поэтому

$$\varphi(t) = \lambda \int_0^{\infty} e^{itx} e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{(it-\lambda)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

Рассмотрим свойства характеристических функций.

1°. $\varphi(0) = 1$; $|\varphi(t)| \leqslant 1$.

Действительно, согласно определению (18.149), $\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ и $|\varphi(t)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |e^{itx}| f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, согласно условию нормировки (18.55).

2°. $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$.

Черта сверху означает переход к комплексно-сопряженному числу.

В самом деле,

$$\varphi(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{e^{itx} f(x)} dx = \overline{\varphi(t)}.$$

3°. Пусть $\varphi_x(t)$ — характеристическая функция с. в. X. Если $Y = kX + b$, то х. ф. этой с. в. имеет вид

$$\varphi_y(t) = e^{itb} \varphi_x(kt). \tag{18.156}$$

□ По определению

$$\varphi_y(t) = M(e^{itY}) = M(e^{it(kX+b)}) = e^{itb} M(e^{i(tk)X}) = e^{itb} \varphi_x(tk). \blacksquare$$

4°. С. в. X и Y независимы тогда и только тогда, когда х. ф.

$\varphi_{x,y}(t, s)$ двумерной с. в. $\mathbf{Z}=(X, Y)$ равна произведению х. ф. случайных величин X и Y:

$$\varphi_{x,y}(t, s)=\varphi_x(t)\varphi_y(s). \tag{18.157}$$

□ Пусть X и Y — независимые с. в. Тогда совместная плотность вероятностей $f(x, y)=f_X(x)f_Y(y)$. Из равенства (18.151)

$$\varphi_{x,y}(t, s)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(tx+sy)}f_X(x)f_Y(y)dxdy=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}f_X(x)dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{isy}f_Y(y)dy=\varphi_x(t)\varphi_y(s).$$

Если же выполнено равенство (18.157), то, применив к выражению $\varphi_x(t)\varphi_y(s)$ обратное преобразование Фурье, получим плотность вероятностей $f_X(x)f_Y(y)$. ■

5°. Для независимых с. в. X и Y х. ф. $\varphi_{x+y}(t)$ суммы $X+Y$ имеет вид $\varphi_{x+y}(t)=\varphi_x(t)\varphi_y(t)$.

Действительно, в силу независимости с. в. X и Y, а значит, и с. в. e^{itX} и e^{itY}, имеем $\varphi_{x+y}(t)=M(e^{it(X+Y)})=M(e^{itX}e^{itY})=$ $=M(e^{itX})M(e^{itY})$.

6°. Если существуют начальные моменты $\nu_k=M(X^k)$, $k=0, 1, 2, \ldots$, то

$$\varphi^{(k)}(0)=\frac{d^k\varphi(0)}{dt^k}=i^k\nu_k. \tag{18.158}$$

□ Дифференцируя k раз равенство (18.149) по t, получаем

$$\frac{d^k\varphi(t)}{dt^k}=\int_{-\infty}^{\infty}(ix)^k e^{itx}f(x)\,dx=i^k\int_{-\infty}^{\infty}x^k e^{itx}f(x)dx.$$

Положив $t=0$, будем иметь

$$\frac{d^k\varphi(0)}{dt^k}=i^k\int_{-\infty}^{\infty}x^k f(x)dx=i^kM(X^k)=i^k\nu_k.$$ ■

В частности, при $k=0, 1, 2$ из формулы (18.158) получим:

$$\varphi'(0)=i\nu_1=iM(X)=im_x;$$
$$\varphi''(0)=-\nu_2=-(\mu_2+m_x^2)=-(D(X)+m_x^2).$$

Отсюда

$$M(X)=-i\varphi'(0);\ D(X)=-\varphi'(0)+\varphi'^2(0). \tag{18.159}$$

7°. Для непрерывной с. в. X при малых t справедлива асимптотическая формула

$$\varphi(t)=1+im_xt-\nu_2t^2/2+o(t^2),\ t\to 0. \tag{18.160}$$

Действительно, раскладывая $\varphi(t)$ в ряд Маклорена с остаточным членом в форме Пеано, получаем

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{\varphi''(0)}{2} t^2 + o(t^2) =$$

$$= 1 + im_x t - \nu_2 \frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

При $m_x = 0$ и $D(X) = 1$ из формул (18.159) и (18.160) следует

$$\varphi(t) = 1 - t^2/2 + o(t^2). \tag{18.161}$$

Задачи и упражнения

1. По х. ф. $\varphi(t) = e^{-\alpha|t|}$, $\alpha > 0$, определить плотность вероятностей с. в. X.
2. Доказать, что если с. в. X имеет четную плотность вероятностей $f(x)$, то ее х. ф. $\varphi(t)$ действительна.
3. С. в. X имеет х. ф. $\varphi(t) = 1/(1+t)^2$. Найти плотность вероятностей $f(x)$.
4. По х. ф. $\varphi(t) = \dfrac{e^{it}(1 - e^{ikt})}{k(1 - e^{it})}$ найти закон распределения $P(X = k) = p_k$ дискретной с. в. X.

18.10. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Неравенство Чебышева. *Неравенство Чебышева* позволяет оценить вероятность неравенства $|X| \leqslant \varepsilon$ для с. в. X, где ε — любое заданное положительное число. Это неравенство имеет вид

$$P(|X| \geqslant \varepsilon) < \frac{M(X^2)}{\varepsilon^2}. \tag{18.162}$$

Докажем его. Пусть $f(x)$ — плотность вероятностей с. в. X. Рассмотрим множество $|X| \geqslant \varepsilon$. Согласно свойству плотности вероятностей (равенство (18.53)), вероятность

$$P(|X| \geqslant \varepsilon) = \int\limits_{|x| \geqslant \varepsilon} f(x)dx = \int\limits_{|x| \geqslant \varepsilon} \frac{x^2}{\varepsilon^2} \frac{\varepsilon^2}{x^2} f(x)dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{|x| \geqslant \varepsilon} \frac{x^2}{\varepsilon^2} f(x)dx = \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{|x| \geqslant \varepsilon} x^2 f(x)dx \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} M(X^2),$$

так как $\varepsilon^2/x^2 \leqslant 1$. Тем самым неравенство Чебышева (18.162) доказано.

Если в неравенстве Чебышева вместо X положить $X^0 = X - M(X)$, то, учитывая, что $M(X^{0^2}) = D(X)$, придем к неравенству

$$P(|X - M(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \tag{18.163}$$

Отсюда при $\varepsilon = \sqrt{D(X)}t = \sigma_x t$, $t > 0$, получим еще одно неравенство:

$$P(|X - M(X)| \geqslant \sigma_x t) < 1/t^2. \tag{18.164}$$

Неравенства (18.163) и (18.164) также называются *неравенствами Чебышева.*

Если рассмотреть событие $|X - M(X)| < \varepsilon$, противоположное событию $|X - M(X)| \geqslant \varepsilon$, то из неравенства (18.163) получим

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (18.165)$$

Неравенство (18.165) подчеркивает уместность выбора дисперсии $D(X)$ в качестве меры рассеяния значений с. в. от м. о. В самом деле, как следует из неравенства (18.165), чем меньше дисперсия $D(X)$, тем при меньшем значении ε можно с той же оценкой вероятности утверждать, что значения с. в. X будут концентрироваться ближе к $M(X)$.

Положив в неравенстве (18.165) $\varepsilon = 3\sigma_x$, получим

$$P(|X - M(X)| < 3\sigma_x) \geqslant 1 - 1/9 \approx 0{,}8889,$$

т. е. вероятность того, что произвольная с. в. отклонится от своего м. о. меньше чем на утроенное среднеквадратическое отклонение, не меньше 0,8889. Это утверждение носит название *«правила трех сигм»*. В частности, для нормально распределенных с. в. по закону $N(m, \sigma^2)$ «правило трех сигм» дает оценку (см. пример 12, § 19.2) $P(|X - m|) < 3\sigma \approx 0{,}997$.

Пример 1. При изготовлении партий одинаковых деталей размерами $l = 10$ мм существует допуск $\Delta l = \pm 0{,}1$ мм. Оценить вероятность того, что взятая случайно деталь бракована, если $\sigma_x^2 = 0{,}0025$.

□ Пусть X — размеры детали. По условию $M(X) = 10$; $\varepsilon = 0{,}1$; $D(X) = 0{,}0025$. Требуется оценить вероятность $P(|X - 10| > 0{,}1)$. По неравенству Чебышева (18.163) $P(|X - 10| > 0{,}1) \leqslant \dfrac{0{,}0025}{0{,}01} = 0{,}25$, т. е. искомая вероятность не превышает 0,25.

Понятия сходимости последовательностей случайных величин. Рассмотрим последовательность с. в. (X_n). Что понимать под пределом такой последовательности? Существуют различные определения предела для последовательности с. в. (X_n). Рассмотрим некоторые из них.

Если событие $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$ имеет вероятность, равную единице, то будем писать $P(X_n \to X) = 1$ при $n \to \infty$ и говорить, что *последовательность X_n сходится к пределу X с вероятностью 1.*

Если м. о. $M((X_n - X)^2) \to 0$ при $n \to \infty$, то говорят, что *последовательность (X_n) сходится к X в среднеквадратическом смысле.*

Если же для всех $\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$

$$P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) \to 0 \Leftrightarrow P(|X_n - X| < \varepsilon) \to 1, \qquad (18.166)$$

то будем говорить, что (X_n) *сходится к X по вероятности.*

Теорема Чебышева (закон больших чисел). Из неравенства Чебышева (18.163) и определения (18.166) сходимости по вероятности вытекает следующая

Лемма. Если для последовательности с. в. (X_n) выполнены равенства $M(X_n) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} D(X_n) = 0$, то (X_n) сходится по вероятности к $X = 0$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n| > \varepsilon) = 0$.

Отсюда получаем следующее утверждение.

Теорема 18.6 (Чебышева). Пусть (X_n) — последовательность попарно независимых с. в., дисперсии которых ограничены в совокупности, т. е. $D(X_n) \leqslant C$, $\forall n$, $C = \text{const}$. Тогда последовательность с. в.

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^0 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (X_k - M(X_k))$$

сходится по вероятности к нулю при $n \to \infty$.

□ По определению

$$M(Y_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(X_k - M(X_k)) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (M(X_k) - M(X_k)) = 0.$$

Далее в силу попарной независимости с. в. X_k по свойству 2° дисперсии имеем

$$D(Y_n) = D\,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (X_k - M(X_k)) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D(X_k) \leqslant \frac{1}{n^2}\,nC =$$

$$= \frac{C}{n} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Отсюда на основании леммы и следует утверждение теоремы. ■

Перепишем Y_n в виде

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(X_k).$$

Величина $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ называется *средним арифметическим* с. в. X_k, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Обобщением теоремы Чебышева является

Теорема 18.7 (Хинчина*). Среднее арифметическое n одинаково распределенных независимых величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, имеющих м. о. $M(X_k) = m_x$, $k = 1, 2, \ldots, n$, при неограниченном возрастании n стремится по вероятности к числу m_x.

Эта теорема, приводимая без доказательства, служит обоснованием правила среднего арифметического в теории измерений: при достаточно большом количестве n измерений $X_1, X_2, \ldots, X_n$ некоторой величины за приближенное ее значение принимается среднее арифметическое $Y_n = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n$ этих измерений.

Справедлива

Теорема 18.8 (Бернулли). Относительная частота появлений события A при n независимых испытаниях по схеме Бернулли сходится по вероятности при $n \to \infty$ к вероятности p появления события в одном испытании, т. е.

* А. Я. Хинчин (1894—1959) — советский математик.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|>\varepsilon\right)=0\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1, \tag{18.167}$$

где m — число появлений события A при n испытаниях.

□ Так как в схеме Бернулли $m_x=np$, $\sigma_x^2=npq$, то вероятность $P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|>\varepsilon\right)=P(|m-np|>n\varepsilon)$.

Применив неравенство Чебышева (18.163) при $X=m$ и заменив в нем ε на $n\varepsilon$, из последнего равенства получим

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|>\varepsilon\right)\leqslant\frac{npq}{n^2\varepsilon^2}=\frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Отсюда при $n\to\infty$ и следует утверждение (18.167). ■

Центральная предельная теорема. Среди предельных теорем наиболее важной является так называемая *центральная предельная теорема,* устанавливающая условия образования в пределе нормального закона распределения.

Теорема 18.9 (центральная предельная теорема). Пусть (X_n) — последовательность независимых и одинаково распределенных с. в., для которых $M(X_n)=m$, $D(X_n)=\sigma^2$, $\sigma>0$, $\forall n$. Тогда закон распределения вероятностей с. в.

$$Y_n=\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n-nm}{\sigma\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k-m}{\sigma} \tag{18.168}$$

при $n\to\infty$ стремится к нормальному закону $N(0, 1)$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n<x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2}dz=\Phi(x). \tag{18.169}$$

□ Покажем сначала, что характеристическая функция $\psi_n(t)$ с. в. Y_n при $n\to\infty$ стремится к х. ф. нормального закона $N(0, 1)$. Так как с. в. X_k распределены одинаково, то с. в. $\frac{X_k-m}{\sigma}$ имеют одну и ту же х. ф. $\varphi(t)=M(e^{it\frac{X_k-m}{\sigma}})$ $k=1, 2, \ldots, n$. Поскольку

$$M\left(\frac{X_k-m}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma}(M(X_k)-m)=\frac{1}{\sigma}(m-m)=0;$$

$$D\left(\frac{X_k-m}{\sigma}\right)=\frac{D(X_k)}{\sigma^2}=\frac{\sigma^2}{\sigma^2}=1,\ k=1, 2, \ldots, n,$$

то, согласно формуле (18.161), $\varphi(t)=1-t^2/2+o(t^2)$, $t\to0$. По свойству 3° (формула (18.156)) х. ф. случайной величины $(X_k-m)/\sigma\sqrt{n}$ равна $\varphi(t/\sqrt{n})=1-t^2/(2n)+o(t^2/n)$, $t\to0$. В силу неза-

висимости с. в. $(X_k - m)/(\sigma\sqrt{n})$ х. ф. их суммы по свойству 5° характеристических функций равна

$$\psi_n(t) = \varphi^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n, \quad t \to 0.$$

Найдем предел этого выражения при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(t) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1 + \left(-\frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)\right)^{\frac{1}{-t^2/(2n)+o(t^2/n)}}\right)^{n(-t^2/(2n)+o(t^2/n))} = e^{-t^2/2},$$

так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(no\left(\frac{t^2}{n}\right)\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(o\left(\frac{t^2}{n}\right)\Big/\frac{1}{n}\right) = 0$. Отсюда на основании равенства (18.155) заключаем, что $\psi_n(t)$ является х. ф. нормального закона $N(0, 1)$.

Итак, доказано, что при $n \to \infty$ х. ф. случайной величины Y_n стремится к х. ф. нормального закона. Отсюда заключаем, что и закон распределения величины Y_n неограниченно приближается при $n \to \infty$ к нормальному закону $N(0, 1)$. ■

Локальная и интегральная формулы Муавра — Лапласа. С помощью центральной предельной теоремы (18.9) можно обосновать формулы Лапласа (18.35) и (18.36).

Перепишем формулу (18.35) в виде

$$P_n(m) = P(Y = m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(m-np)^2}{2npq}}. \qquad (18.170)$$

Здесь p — вероятность наступления события A в каждом испытании; $q = 1 - p$ — вероятность события $\bar{A}$; $P_n(m)$ — вероятность того, что в n опытах событие A наступит ровно m раз.

Обозначим X_k число появлений события A в k-м испытании. Тогда $Z_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ есть общее число появлений события A в n опытах. В силу независимости опытов с. в. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы, причем, как известно, $M(Z_n) = np$, $D(Z_n) = npq$. Поэтому, согласно центральной предельной теореме, величины Z_n при $n \to \infty$ стремятся к нормальному закону с м. о. np и дисперсией npq. Это означает, что при достаточно большом n справедлива формула Муавра — Лапласа (18.170).

Обоснуем теперь формулу (18.36). Пусть X_k — число появлений события A в k-м испытании. Тогда сумма $Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ есть число появлений события A во всех n испытаниях. Так как в одном k-м испытании $M(X_k) = p$, $D(X_k) = pq = \sigma^2$, то, подставив эти значения в равенство (18.168), получим

$$Y_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{z - np}{\sqrt{npq}}.$$

Отсюда на основании формулы (18.169) будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n < x) = \lim_{n\to\infty} P\Big(\frac{Z-np}{\sqrt{npq}} < x\Big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{x} e^{-z^2/2}dz = \Phi(x).$$

Задачи и упражнения

1. Доказать, что $\lim_{n\to\infty} M\,(e^{\sum_{k=1}^{n} itX_k/n}) = e^{itm}$, если X_n — независимые, одинаково распределенные с. в., имеющие м. о. $M(X_n) = m$, $\forall\, n$.

2. Последовательность независимых с. в. (X_n) задана законом распределения

X_n	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$
p	1/3	1/3	1/3

Убедиться, что к этой последовательности применима теорема Чебышева.

18.11. ДВУМЕРНОЕ НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Свойства двумерного нормального распределения. Напомним, что с. в. X имеет нормальное распределение с м. о. m и дисперсией σ^2 ($|m| < \infty$, $\sigma > 0$), если плотность вероятностей с. в. X имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \tag{18.171}$$

а характеристическая функция

$$\varphi(t) = e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}. \tag{18.172}$$

Пусть $\mathbf{Z} = (X, Y)$ — двумерная с. в. с невырожденной (положительно определенной) ковариационной матрицей

$$K_{xy} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix}.$$

Тогда обратной ей является матрица

$$K_{xy}^{-1} = \frac{1}{|K_{xy}|}\begin{bmatrix} \sigma_y^2 & -\sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & \sigma_x^2 \end{bmatrix},$$

где $|K_{xy}|$ — определитель ковариационной матрицы K_{xy}.

Говорят, что случайный вектор (X, Y) имеет *двумерное нормальное распределение* с м. о. $\mathbf{m} = (m_x, m_y)$ и ковариационной матрицей $K = K_{xy}$, если совместная плотность вероятностей с. в. X и Y имеет вид

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|K_{xy}|}} \exp\Big(-\frac{1}{2}(x-m_x,\ y-m_y)K_{xy}^{-1}\begin{pmatrix} x-m_x \\ y-m_y \end{pmatrix}\Big)^{*}. \tag{18.173}$$

* $\exp(x) = e^x$.

Если обозначить $\mathbf{Z}=(X,\ Y)^T$, $\mathbf{m}_z=(m_x,\ m_y)^T$, то

$$f(x,\ y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{|K_{xy}|}}\exp\Big(-\frac{1}{2}(\mathbf{Z}-\mathbf{m}_z)^T K_{xy}^{-1}(\mathbf{Z}-\mathbf{m}_z)\Big). \quad (18.174)$$

Характеристическая функция $\varphi_{x,y}(t,\ s)$ двумерной нормально определенной с. в. по аналогии с равенством (18.172) запишется в виде

$$\varphi_{x,y}(t,\ s)=\exp\Big(i(tm_x+sm_y)-\frac{1}{2}(t,\ s)K_{xy}\begin{pmatrix}t\\ s\end{pmatrix}\Big). \quad (18.175)$$

Выясним свойства двумерного нормального распределения.

1°. С. в. X и Y, распределенные по нормальному закону, независимы тогда и только тогда, когда они некоррелированы.

□ Если X и Y независимы, то, как показано в § 18.7, они некоррелированы.

Пусть теперь нормально распределенные с. в. некоррелированы, т. е. $\sigma_{xy}=0$. В этом случае их ковариационная матрица K_{xy} имеет вид $K_{xy}=\begin{bmatrix}\sigma_x^2 & 0\\ 0 & \sigma_y^2\end{bmatrix}$. Тогда х. ф. (18.175) этих с. в.

$$\varphi_{x,y}(t,\ s)=\exp\Big(i(tm_x+sm_y)-\frac{1}{2}(t,\ s)\begin{bmatrix}\sigma_x^2 & 0\\ 0 & \sigma_y^2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}t\\ s\end{pmatrix}\Big)=$$
$$=e^{itm_x}e^{ism_y}e^{-\frac{1}{2}(\sigma_x^2t^2+\sigma_y^2s^2)}=$$
$$=e^{itm_x-\frac{1}{2}\sigma_x^2t^2}e^{ism_y-\frac{1}{2}\sigma_y^2s^2}=\varphi_x(t)\varphi_y(s),$$

где $\varphi_x(t)=\exp(itm_x-\frac{1}{2}\sigma_x^2t^2)$, $\varphi_y(s)=\exp(ism_y-\frac{1}{2}\sigma_y^2s^2)$ — х. ф. случайных величин X и Y соответственно. Отсюда по свойству 5° х. ф. и следует независимость с. в. X и Y. ■

2°. Линейная комбинация нормально распределенных с. в. является нормально распределенной с. в.

□ Пусть X и Y — нормально распределенные с. в. с ковариационной матрицей K_{xy} и х. ф. (18.175). Для с. в. $U=\alpha X+\beta Y$, $\alpha,\ \beta\in\mathbf{R}$, х. ф.

$$\varphi_{\alpha x+\beta y}(r)=M(e^{iru})=M(e^{ir(\alpha x+\beta y)})=$$
$$=M(e^{i(r\alpha,\ r\beta)\binom{x}{y}})=\varphi_{x,y}(r\alpha,\ r\beta).$$

Отсюда и из формулы (18.175) при $t=r\alpha$ и $s=r\beta$ получаем

$$\varphi_{\alpha x+\beta y}(r)=\exp\Big(i(r\alpha m_x+r\beta m_y)-\frac{1}{2}(r\alpha,\ r\beta)K_{xy}\begin{pmatrix}r\alpha\\ r\beta\end{pmatrix}\Big)=$$
$$=\exp\Big(ir(\alpha m_x+\beta m_y)-\frac{1}{2}r^2(\alpha,\ \beta)K_{xy}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\Big).$$

Согласно равенству (18.172), выражение для $\varphi_{\alpha x+\beta y}$ представляет собой х. ф. случайной величины $U=\alpha X+\beta Y$, распределенной по нормальному закону $N(\alpha m_x+\beta m_y,\ \sigma^2)$, где $\sigma^2=(\alpha,\ \beta)K_{xy}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$.

Итак, если с. в. $\mathbf{Z}=(X,\ Y)$ распределена по нормальному закону с м. о. $\mathbf{m}_z=(m_x,\ m_y)$ и ковариационной матрицей K_{xy}, то линейная комбинация $\alpha X+\beta Y$ с. в. X и Y также распределена по нормальному закону с м. о. $\alpha m_x+\beta m_y$ и дисперсией $\sigma^2=(\alpha,\ \beta)K_{xy}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$. Отсюда плотность вероятностей с. в. $\alpha X+\beta Y$ имеет вид

$$f_{\alpha X+\beta Y}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\alpha m_x-\beta m_y)}{2\sigma^2}},\quad \sigma^2=(\alpha,\ \beta)K_{xy}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}. \quad (18.176)$$

В частности, если X и Y — независимые с. в., то $\sigma^2=\alpha^2\sigma_x^2+\beta^2\sigma_y^2$, и, следовательно, для таких с. в. плотность вероятностей

$$f_{\alpha X+\beta Y}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\alpha^2\sigma_x^2+\beta^2\sigma_y^2}}\exp\left(-\frac{(x-\alpha m_x-\beta m_y)^2}{2(\alpha^2\sigma_x^2+\beta^2\sigma_y^2)}\right). \quad (18.177)$$

3°. Максимальное значение функции $f(x,\ y)$, равное $1/(2\pi\sqrt{|K_{xy}|})$, достигается в точке $(x,\ y)=(m_x,\ m_y)$ (рис. 18.21).

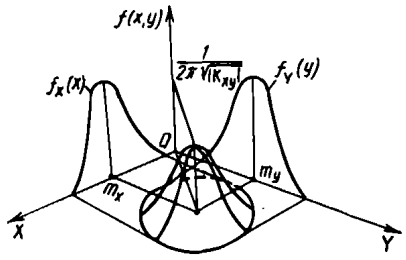


Рис. 18.21

Пример 1. Случайный вектор $\mathbf{Z}=(X,\ Y)$ имеет нормальное распределение с совместной плотностью вероятностей

$$f(x,\ y)=\frac{1}{a}\exp\left(-\frac{1}{2}(x^2+2y^2-xy-3x-2y+4)\right). \quad (18.178)$$

Найти м. о. m_x и m_y, ковариационную матрицу K_{xy} и коэффициент a.

□ Находим точку минимума функции $g(x,\ y)=x^2+2y^2-xy-3x-2y+4$:

$$\left.\begin{aligned}g'_x&=2x-y-3=0;\\ g'_y&=4y-x-2=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases}x=2;\\ y=1.\end{cases}$$

Согласно свойству 3°, $m_x=x=2$, $m_y=y=1$. В силу равенств (18.174) и (18.178) заключаем, что квадратичная форма, соответствующая функции $g(x,\ y)$, имеет матрицу $K_{xy}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1/2\\ -1/2 & 2\end{bmatrix}$. Отсюда $K_{xy}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}8 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$. Сравнивая равенства (18.178) и (18.174), получаем

$$a=2\pi\sqrt{|K_{xy}|}=2\pi\sqrt{4}=4\pi.$$

С помощью плотности вероятностей двумерной с. в. можно вычислять несобственные интегралы от функций вида

$$e^{-(a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+a_{13}x+a_{23}y)},$$

где квадратичная форма $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$ положительно определена. Проиллюстрируем сказанное на примере.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-(x^2+2xy+4y^2)}dxdy$.

□ Считая, что функция

$$f(x,\ y)=\frac{1}{k}\,e^{-(x^2+2xy+4y^2)}$$

есть совместная плотность вероятностей с. в. X и Y, найдем соответствующую им ковариационную матрицу K_{xy}. Имеем

$$x^2+2xy+4y^2=\frac{1}{2}(2x^2+4xy+8y^2)=\frac{1}{2}(x,\ y)\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 8\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{2}(x,\ y)K_{xy}^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$K_{xy}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 8\end{bmatrix}\Rightarrow K_{xy}=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}8 & -2\\ -2 & 2\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}4 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix};\ |K_{xy}|=\frac{1}{2}.$$

Тогда в соответствии с формулой (18.174) получаем, что $k=2\pi\sqrt{0{,}5}$, и, следовательно,

$$f(x,\ y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{0{,}5}}\,e^{-(x^2+2xy+4y^2)}.$$

Отсюда, учитывая свойство нормировки, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-(x^2+2xy+4y^2)}dxdy=2\pi\sqrt{0{,}5}\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sqrt{0{,}5}}\,e^{-(x^2+2xy+4y^2)}dxdy\Big)=\frac{2\pi}{\sqrt{2}}.$$

Маргинальные и условные плотности вероятностей нормально распределенных с. в. Так как

$$(x-m_x,\ y-m_y)K_{xy}^{-1}\begin{pmatrix}x-m_x\\ y-m_y\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{|K_{xy}|}(x-m_x,\ y-m_y)\begin{bmatrix}\sigma_y^2 & -\sigma_{xy}\\ -\sigma_{xy} & \sigma_x^2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x-m_x\\ y-m_y\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{|K_{xy}|}(\sigma_y^2(x-m_x^2)-2\sigma_{xy}(x-m_x)(y-m_y)+\sigma_x^2(y-m_y)^2),$$

то из формулы (18.174) для совместной плотности вероятностей с. в. X и Y получим ее выражение в подробной записи:

$$f(x,\ y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{|K_{xy}|}}\exp\Big(-\frac{1}{2|K_{xy}|}(\sigma_y^2(x-m_x)^2-2\sigma_{xy}(x-m_x)(y-m_y)+$$
$$+\sigma_x^2(y-m_y)^2)\Big).\qquad(18.179)$$

Покажем, что маргинальные и условные плотности вероятностей нормального векторного распределения являются нормальными.

Для маргинальной плотности вероятностей $f_X(x)$, согласно равенствам (18.80) и (18.179), после несложных преобразований получим

$$f_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,\ y)dy=\frac{1}{2\pi\sqrt{|K_{xy}|}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\frac{1}{2|K_{xy}|}(\sigma_y^2(x-m_x)^2-$$
$$-2\sigma_{xy}(x-m_x)(y-m_y)+\sigma_x^2(y-m_y)^2)\Big)dy=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}\,e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}\frac{\sigma_x}{\sqrt{2\pi}\sqrt{|K_{xy}|}}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\frac{\sigma_x^2}{2|K_{xy}|}\Big((y-m_y)-$$

$$-\frac{\sigma_{xy}(x-m_x)}{\sigma x^2}\Big)^2\Big)dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\Big(-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\Big).$$

Аналогично найдем

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y}\exp\left(-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right).$$

Графики функций $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ являются проекциями графика функции $f(x, y)$ на плоскости Xf и Yf соответственно и изображены на рис. 18.21.

Для условной плотности вероятностей, согласно формуле (18.88),

$$f_X(x|Y=y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{\sqrt{2\pi}\sigma_y}{2\pi\sqrt{|K_{xy}|}}\exp\Big(-\frac{1}{2|K_{xy}|}(\sigma_y^2(x-m_x)^2-$$

$$-2\sigma_{xy}(x-m_x)(y-m_y)+\sigma_x^2(y-m_y)^2)+\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\Big)=$$

$$=\frac{\sigma_y}{\sqrt{2\pi}\sqrt{|K_{xy}|}}\exp\Big(-\frac{\sigma_y^2}{2|K_{xy}|}\Big((x-m_x)-\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y-m_y)\Big)^2\Big).$$

Таким образом,

$$f_X(x|Y=y)=\frac{\sigma_y}{\sqrt{2\pi|K_{xy}|}}\exp\Big(-\frac{\sigma_y^2}{2|K_{xy}|}\Big((x-m_x)-$$

$$-\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y-m_y)\Big)^2\Big). \qquad (18.180)$$

Из формул (18.180) и (18.171) следует, что условная плотность вероятностей $f_X(x|Y=y)$ представляет собой нормальное распределение с условным м. о.

$$M(X|Y=y)=m_x+\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y-m_y) \qquad (18.181)$$

и дисперсией $D(X|Y=y)=|K_{xy}|/\sigma_y^2$.

Аналогично найдем

$$f_Y(y|X=x)=\frac{\sigma_x}{\sqrt{2\pi|K_{xy}|}}\exp\Big(-\frac{\sigma_x^2}{2|K_{xy}|}\Big((y-m_y)-$$

$$-\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x-m_x)\Big)^2\Big). \qquad (18.182)$$

Отсюда

$$M(Y|X=x)=m_y+\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x-m_x); \qquad (18.183)$$

$$D(Y|X=x)=|K_{xy}|/\sigma_x^2.$$

Условные м. о. (18.181) и (18.183) называются *регрессионными формулами* или *функциями регрессии*.

Задачи и упражнения

1. Для двумерной нормально распределенной с. в с плотностью вероятностей

$$f(x,\ y)=\frac{1}{a}\exp\left(-\frac{1}{2}(2x^2+y^2+2xy-22x-14y+65)\right)$$

найти коэффициент a.

2. Пусть $(X,\ Y)$ — нормально распределенная с. в. с м. о. $(m_x,\ m_y)$ и ковариационной матрицей $K_{xy}=\sigma^2E$, где E — единичная матрица. Доказать, что с. в. $aX+bY$ и $\alpha X+\beta Y$, где $a,\ b,\ \alpha,\ \beta\in\mathbf{R}$, независимы тогда и только тогда, когда $a\alpha+b\beta=0$.

3. Пусть $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_{100}$ — сто взаимно независимых с. в., одинаково распределенных по нормальному закону $N(4,\ \sqrt{2^2})$. Найти м. о. и дисперсию с. в. $(X_1+X_2+\ldots+X_{100})/100$.

19. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

19.1. ВЫБОРКА И ЕЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Выборка. Математическая статистика является разделом математики, непосредственно примыкающим к теории вероятностей. В ней рассматриваются приближенные методы нахождения законов и числовых характеристик с. в. по результатам экспериментов или наблюдений.

Во многих практических задачах, связанных с повторяющимися испытаниями, нельзя провести все возможные испытания, а можно проделать лишь доступную, выборочную их часть, а затем сделать обоснованный вывод. Например, условимся считать некоторый радиоприбор стандартным, если продолжительность его работы составляет 5000 ч, в противном случае он считается нестандартным. Исследовать каждый прибор на продолжительность работы невозможно. Тогда как получить представление о качестве изготовляемых приборов? Для этого достаточно иметь сведения о качестве небольшого числа приборов, отобранных случайно. Тогда по продолжительности работы отобранных приборов можно судить о качестве всей партии.

Совокупность всех возможных значений, или реализаций, исследуемых с. в. называется *генеральной совокупностью.* Она может состоять из конечного или бесконечного множества значений, называемых *элементами генеральной совокупности.*

Множество значений с. в., полученных в результате наблюдений над нею, называется *случайной выборкой* или просто *выборкой,* а число n этих наблюдений — *объемом выборки.*

Задача математической статистики состоит в исследовании свойств выборки и обобщении этих свойств на всю генеральную совокупность. Полученный при этом вывод называется *статистическим.*

Основное требование к выборке: она должна хорошо представлять генеральную совокупность, т. е. быть репрезентативной. Простой случайной выборкой называется выборка, извлеченная так, что любая возможная выборка объема n имеет ту же вероятность извлечения из генеральной совокупности. Для удовлетворения этого определения каждый элемент выборки следует возвращать в генеральную совокупность перед извлечением следующего элемента. Такая выборка называется *выборкой с возвращением.* Если выбранный элемент не возвращается в генеральную совокупность, то выборка называется *выборкой без возвращения.*

Формально выборка объема n есть набор реализаций n независимых одинаково распределенных с. в.

Статистические ряды. Как правило, результаты эксперимента или наблюдения дискретных с. в. сводятся в таблицу, в первой строке которой записывается номер i эксперимента, а во второй — соответствующее наблюдение x_i, называемое *вариантой* с. в. X. Ниже приведена таблица выпуска приборов за одну смену (табл. 19.1), где i — номер смены, а варианта x_i — число выпущенных приборов:

Таблица 19.1

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	5	3	5	5	6	4	7	4	5	6	6	4	5	3	6	5	4	6	5	5

Таблицы такого вида называются *статистическими рядами несгруппированных данных*. Статистический ряд, расположенный по возрастанию вариант, называется *вариационным*.

Пусть m_i — частота наблюдения x_i, $n = \sum\limits_i m_i$ — общее число наблюдений, т. е. объем выборки (в нашем случае $n = 20$). Величина m_i/n называется *относительной частотой наблюдения* x_i. Таблица сгруппированных данных по частоте и относительной частоте наблюдений (табл. 19.2) имеет следующий вид:

Таблица 19.2

x_i	3	4	5	6	7
m_i	2	4	8	5	1
$\frac{m_i}{n}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{1}{20}$

Такие таблицы называются *статистическими рядами сгруппированных данных*.

Эмпирическая функция распределения. Пусть имеется статистический ряд сгруппированных данных с. в. X. *Эмпирической функцией распределения* или *функцией распределения выборки* называется функция $F^*(x)$, определяющая для каждого $x \in \mathbf{R}$ относительную частоту события $(X < x)$, т. е. по определению

$$F^*(x) = n_x/n,$$

где n_x — число вариант, меньших x; n — объем выборки.

По определению эмпирическая функция $F^*(x)$ зависит от выборки. Она обладает свойствами функции распределения: ее значения принадлежат отрезку $[0, 1]$; $F^*(x)$ является неубывающей функцией; если x_1 — наименьшая варианта, а x_k — наибольшая, то $F^*(x) = 0$ при $x \leqslant x_1$ и $F^*(x_k) = 1$ при $x > x_k$.

Построим эмпирическую функцию распределения по табл. 19.2. Из свойств функции $F^*(x)$ и данных таблицы получаем

$$F^*(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 3;\\ 0{,}1, & 3<x\leqslant 4;\\ 0{,}3, & 4<x\leqslant 5;\\ 0{,}7, & 5<x\leqslant 6;\\ 0{,}95, & 6<x\leqslant 7;\\ 1, & x>7.\end{cases}$$

График функции $F^*(x)$ изображен на рис. 19.1.

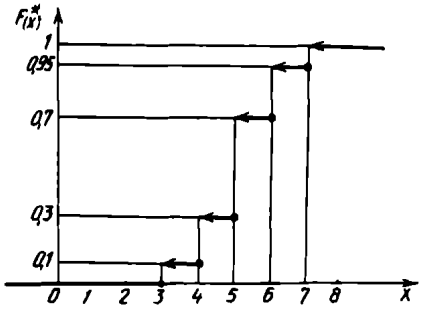


Рис. 19.1

Гистограмма и полигон частот. Статистические ряды сгруппированных данных представляют графиками и диаграммами, наиболее распространенными из которых являются гистограмма и полигон частот.

Сгруппированные данные разобъем определенным образом на k непересекающихся интервалов одинаковой длины, охватывающих в своей совокупности всю выборку. Такие интервалы называются *интервалами группировки*. В каждом интервале группировки подсчитаем число m_i частот варианты, попавших в этот интервал. В прямоугольной системе координат по горизонтальной оси отложим интервалы группировки, а по вертикальной — частоты. *Гистограмма частот* представляет собой ступенчатую фигуру, состоящую из примыкающих друг к другу прямоугольников с основаниями, равными ширине h интервала группировки, а высота его m_i/h такова, что площадь прямоугольника равна частоте m_i появлением варианты x_i в данном интервале.

Если по вертикальной оси откладывать относительную частоту m_i/n, получим так называемую *гистограмму относительных частот*.

Отметим, что число наблюдений (вариант), попадающих в определенный интервал, равно площади соответствующего прямоугольника на гистограмме частот. На гистограмме же относительных частот площадь каждого прямоугольника равна относительной частоте m_i/n попадания варианты x_i в соответствующий интервал.

Построим гистограммы частот и относительных частот сгруппированных данных по табл. 19.2. Для этого на оси X отложим 5 интервалов длиной $h=1$ так, чтобы середина каждого из них была равна соответствующему значению x_i. Графики этих гистограмм приведены на рис. 19.2, *а* и 19.2, *б* соответственно. Для удобства в качестве середины интервала выбрана варианта x_i.

Другими графическими характеристиками выборки являются полигон частот и полигон относительных частот. *Полигон частот* представляет собой ломаную, отрезки которой соединяют точки (x_1, m_1) (x_2, m_2), ..., (x_n, m_n), где x_i — варианты, а m_i — их частоты, $i=1, 2, \ldots, n$. *Полигон относительных частот* есть ломаная, отрезки которой соединяют точки $\left(x_1, \frac{m_1}{n}\right)$, $\left(x_2, \frac{m_2}{n}\right)$, ..., $\left(x_n, \frac{m_n}{n}\right)$. На

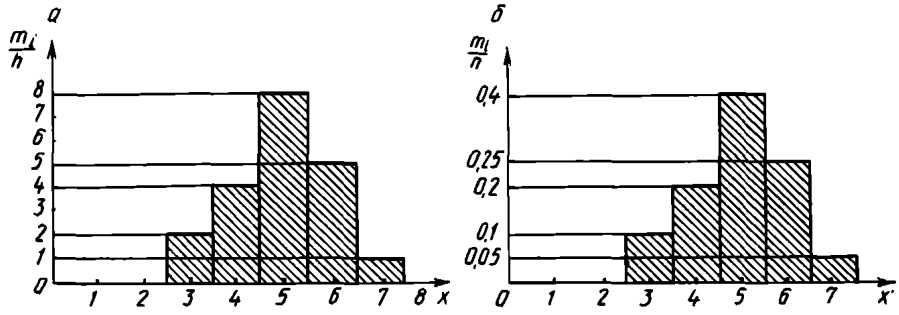


Рис. 19.2

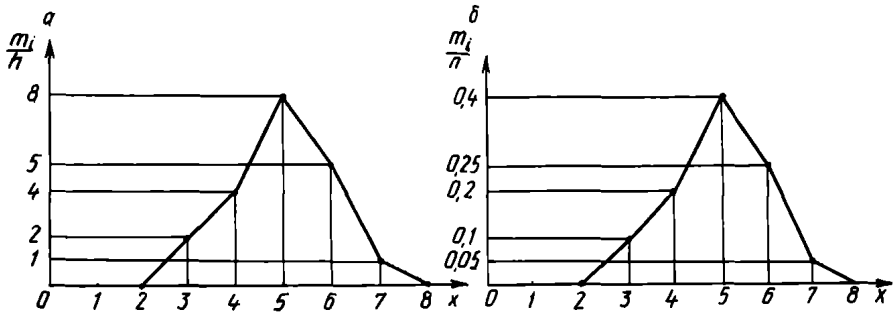


Рис. 19.3

рис. 19.3 *а, б* приведены полигоны частот и относительных частот соответственно для сгруппированных данных из табл. 19.2.

Числовые характеристики выборки. По результатам выборочных наблюдений вычисляются такие статистические выборочные характеристики, как выборочные средняя, дисперсия, среднее квадратичное отклонение, коэффициент корреляции и т. д. Эти характеристики определяют соответствующие параметры генеральной совокупности. Выборочные характеристики представляют собой с. в., зависящие от самой выборки.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — выборка из генеральной совокупности. *Средним значением выборки* или *выборочным средним* называется число

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \qquad (19.1)$$

Число $x_i - \bar{x}$ называется *отклонением* величины x_i от выборочного среднего $\bar{x}$.

Выборочной дисперсией называется число

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2, \qquad (19.2)$$

т. е. выборочная дисперсия равна среднему значению суммы квадратов отклонений.

Преобразуем формулу (19.2) с учетом равенства (19.1):

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \frac{2\bar{x}}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i +$$

$$+ \frac{\bar{x}^2}{n}n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \bar{x}^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i\Big)^2\Big).$$

Итак, выборочная дисперсия

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i\Big)^2\Big). \qquad (19.3)$$

Формула (19.3) удобна для вычисления дисперсии.

Часто в математической статистике рассматривается *модифицированная дисперсия*

$$s_0^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i\Big). \qquad (19.4)$$

Если значения x_i выборки имеют частоты m_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$, то выборочное среднее приводится к виду

$$\bar{x} = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + \ldots + x_km_k}{m_1 + m_2 + \ldots + m_k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_im_i, \qquad (19.5)$$

а выборочная дисперсия — к виду

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2m_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_i^2m_i - \bar{x}^2. \qquad (19.6)$$

Корень квадратный из выборочной дисперсии называется *выборочным средним квадратичным отклонением* s.

Пример 1. Выборка сгруппированных данных с. в. X определена таблицей

x_i	45	50	55	60	65	70	75
m_i	4	6	10	40	20	12	8

Найти выборочные: а) среднее; б) дисперсию; в) среднее квадратичное отклонение.

□ а) По формуле (19.5) выборочное среднее

$$\bar{x} = \frac{45\cdot 4 + 50\cdot 6 + 55\cdot 10 + 60\cdot 40 + 65\cdot 20 + 70\cdot 12 + 75\cdot 8}{4 + 6 + 10 + 40 + 20 + 12 + 8} = \frac{6170}{100} = 61{,}7.$$

б) Для вычисления выборочной дисперсии составим предварительно таблицу квадратов с. в. X:

x_i^2	2025	2500	3025	3600	4225	4900	5625
m_i	4	6	10	40	20	12	8

По формуле (19.6) имеем ($n = 100$):

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7} m_i x_i^2 - \bar{x}^2 = 3856{,}50 - 3806{,}89 = 49{,}61.$$

в) Выборочное среднее квадратичное $s = \sqrt{49{,}61} \approx 7{,}04$.

Простейшей мерой рассеяния с. в. является *размах выборки* R — разность между наибольшим и наименьшим значениями выборки: $R = x_{\max} - x_{\min}$.

Выражения

$$\mu_r^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i (x_i - \bar{x})^r;$$
$$\nu_r^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i x_i^r, \quad r = 1, 2, \ldots, \tag{19.7}$$

называются *r-м центральным* и *начальным моментами* соответственно. Заметим, что $\nu_1^* = x$, $\mu_2^* = s^2$.

Асимметрией выборки называется число

$$a_s = \frac{\mu_3^*}{s^3} = \frac{1}{ns^3}\sum_{i=1}^{k} m_i (x_i - \bar{x})^3. \tag{19.8}$$

Эксцессом выборки называется число

$$e_k = \frac{\mu_4^*}{s^4} - 3 = \frac{1}{ns^4}\sum_{i=1}^{k} m_i (x_i - \bar{x})^4 - 3. \tag{19.9}$$

Асимметрия и эксцесс являются характеристиками отклонения эмпирического (опытного) распределения от нормального распределения. Говорят, что асимметрия эмпирического распределения положительна (отрицательна), если его главная часть, т. е. максимум, концентрируется с левой (правой) стороны от нормального распределения (рис. 19.4). Если же максимум эмпирического распределения расположен выше (ниже), чем у нормального, то говорят, что эмпирическое распределение имеет положительный (отрицательный) эксцесс (рис. 19.5).

Если в генеральной совокупности рассматриваются одновременно два признака X и Y, например рост и масса человека в данной группе людей, то для характеристики их взаимосвязи вводится понятие ковариации $\operatorname{cov}(X, Y)$:

$$\operatorname{cov}(X, Y) = s_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}). \tag{19.10}$$

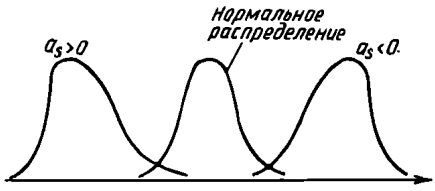


Рис. 19.4

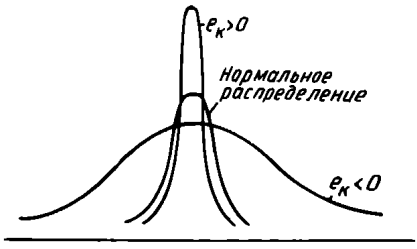


Рис. 19.5

Здесь x_i, y_i — отдельные значения в соответствующих выборках. После несложных преобразований, аналогичных преобразованиям при выводе формулы (19.3), получим

$$s_{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\bar{x}\bar{y}=\overline{xy}-\bar{x}\bar{y}, \tag{19.11}$$

где $\overline{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$ — выборочное среднее произведения с. в. X и Y.

Ковариация может быть положительной, отрицательной или равной нулю. Если большим (малым) значениям x_i соответствуют большие (малые) значения y_i, то $s_{xy}>0$. Говорят, что в этом случае между признаками X и Y существует *положительная корреляция*. Если же большим (малым) значениям x_i соответствуют малые (большие) значения y_i, то $s_{xy}<0$. В этом случае говорят, что между признаками X и Y существует *отрицательная корреляция*. При $s_{xy}=0$ между признаками X и Y корреляция отсутствует.

Пример 2. Найти $\operatorname{cov}(X, Y)$ по данным таблицы

i	1	2	3	4	5
x_i	-1	0	1	2	4
y_i	0	1	3	4	5

□ Имеем $\bar{x}=\frac{1}{5}(-1+0+1+2+4)=\frac{6}{5}$, $\bar{y}=\frac{13}{5}$, $\sum_{i=1}^{5}x_iy_i=31$. По формуле (19.11) $\operatorname{cov}(X, Y)=\frac{1}{5}31-\frac{6}{5}\frac{13}{5}=\frac{77}{25}>0$, т. е. между признаками X и Y существует положительная корреляция.

Отметим некоторые важные свойства выборочных среднего и дисперсии в виде теорем.

Теорема 19.1. Сумма отклонений отдельных значений x_i от их среднего $\bar{x}$ равна нулю: $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=0$.

□ В самом деле,

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=\sum_{i=1}^{n}x_i-n\bar{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i-n\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=0. \blacksquare$$

Теорема 19.2. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределенные с. в., причем $M(X_i)=m$, $D(X_i)=\sigma^2$, $i=1, 2, \ldots, n$. Тогда для с. в. $\bar{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\ldots+X_n)$ имеем:

$$M(\bar{X})=m;\ D(\bar{X})=\sigma^2/n. \tag{19.12}$$

□ Из свойств м. о. и дисперсии

$$M(\bar{X})=M\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\Big)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}m=\frac{1}{n}mn=m;$$

$$D(\bar{X})=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{n\sigma^2}{n^2}=\frac{\sigma^2}{n}. \blacksquare$$

Следствие. Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — с. в., нормально распределенные по закону $N(m, \sigma^2)$, то с. в. $\bar{X}$ имеет нормальное распределение $N(m, \sigma^2/n)$.

Это следует из формул (19.12) и того факта, что сумма нормально распределенных с. в. есть нормально распределенная с. в.

Задачи и упражнения

1. Построить эмпирическую функцию распределения по данным выборки

x_i	4	7	8
m_i	5	2	3

2. Построить гистограмму и полигон относительных частот по данным выборки

x_i	20	40	65	80
m_i/n	0,1	0,2	0,3	0,4

3. Найти выборочную дисперсию по выборке объема $n=50$:

x_i	0,1	0,5	0,6	0,8
m_i	5	15	20	10

4. По данным выборки

x_i	8,8	9,3	9,8	10,3	10,8	11,3	11,8
m_i	4	8	11	7	5	3	2

найти: а) выборочное среднее; выборочную дисперсию; в) асимметрию; г) эксцесс.

19.2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Понятие оценки. Такие распределения, как биномиальное, показательное, нормальное, являются семействами распределений, зависящими от одного или нескольких параметров. Например, показательное распределение с плотностью вероятностей $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$, зависит от одного параметра λ, нормальное распределение $N(m, \sigma^2)$ — от двух параметров m и σ. Из условий исследуемой задачи, как правило, ясно, о каком семействе распределений идет речь. Однако остаются неизвестными конкретные значения параметров этого распределения, входящие в выражения интересующих нас характеристик распределения. Поэтому необходимо знать хотя бы приближенное значение этих величин.

Пусть закон распределения генеральной совокупности определен с точностью до значений входящих в его распределение параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$, часть из которых может быть известна. Одной из задач математической статистики является нахождение оценок неизвестных параметров по выборке наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из генеральной совокупности. Оценка неизвестных параметров заключается в построении функции $\hat{\theta} = u(x_1, x_n, \ldots, x_n)$ от случайной выборки, такой, что значение этой функции приближенно равно оцениваемому неизвестному параметру θ. Функция $\hat{\theta}$ называется *статистикой* или *оценкой параметра* θ. Например, выборочное среднее $\bar{x}$ и медиана **Me** могут служить оценкой среднего значения m всей генеральной совокупности, выборочная дисперсия s^2 — дисперсией этой совокупности.

Существует два вида оценок — точечные и интервальные. *Точечная оценка* параметра θ определяется одним числом $\hat{\theta} = u(x_i, x_2, \ldots, x_n)$. При малом числе наблюдений эти оценки могут приводить к грубым ошибкам. Чтобы избежать их, используют интервальные оценки, которые определяются двумя числами θ_1 и θ_2 — концами интервала, в котором с заданной вероятностью заключена оцениваемая величина θ.

Классификация точечных оценок. Для данного неизвестного параметра совокупности может существовать несколько статистик, вполне подходящих для того, чтобы служить оценками. Например, выборочное среднее, мода **Mo** и медиана **Me** могут показаться вполне пригодными для оценивания среднего значения всей генеральной совокупности. Для выбора «наилучших» оценок необходимо определить их свойства: несмещенность, эффективность и состоятельность.

Оценка $\hat{\theta}$ параметра θ называется *несмещенной (без систематических ошибок)*, если математическое ожидание оценки совпадает с истинным значением θ:

$$M(\hat{\theta}) = \theta. \tag{19.13}$$

Если равенство (19.13) не имеет места, то оценка $\hat{\theta}$ называется *смещенной (с систематическими ошибками)*. Это смещение может быть связано с ошибками измерения, счета или неслучайным харак-

тером выборки. Систематические ошибки приводят к завышению или занижению оценки.

Пример 1. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — с. в. с м. о. $m = M(X_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Для их среднего арифметического $\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$, согласно теореме 19.1, $M(\overline{X}) = m$. Таким образом, $\overline{X}$ является несмещенной оценкой величины m.

Пример 2. Выработки до отказа (в часах) 8 аккумуляторов следующие: 10,8; 15,7; 12,0; 9,2; 13,2; 11,6; 10,4; 12,7. Предполагая, что выработки всех аккумуляторов имеют одно и то же распределение, получить несмещенную оценку средней выработки аккумулятора.

□ Такой несмещенной оценкой, согласно примеру 1, является среднее арифметическое $\overline{X} = \frac{1}{8}(10{,}8 + 15{,}7 + 12{,}0 + 9{,}2 + 13{,}2 + 11{,}6 + 10{,}4 + 12{,}7) = 11{,}95$.

Пример 3. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — взаимно независимые с. в. с м. о. $m = M(X_i)$ и дисперсией $\sigma^2 = D(X_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Выберем в качестве оценки дисперсии σ^2 генеральной совокупности выборочную дисперсию $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$.

Преобразуем ее:

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m + m - \overline{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2 -$$

$$- \frac{2}{n}(\overline{X} - m)\sum_{i=1}^{n}(X_i - m) + \frac{n}{n}(\overline{X} - m)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2 - (\overline{X} - m)^2.$$

Итак,

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2 - (\overline{X} - m)^2. \qquad (19.14)$$

В силу независимости с. в. X_i и теоремы 19.2 имеем

$$M(s^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M((X_i - m)^2) - M((\overline{X} - m)^2) =$$

$$= \frac{n}{n}\sigma^2 - M((\overline{X} - M(\overline{X}))^2) = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

Таким образом,

$$M(s^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2. \qquad (19.15)$$

Итак, выборочная дисперсия s^2 является смещенной оценкой дисперсии σ^2.

Умножив равенство (19.15) на $\frac{n}{n-1}$, получим $\sigma^2 = M\left(\frac{n}{n-1}s^2\right)$. Отсюда следует, что несмещенной оценкой дисперсии σ^2 является статистика

$$\frac{n}{n-1}s^2 = \frac{n}{n-1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = s_0^2.$$

Таким образом, *модифицированная выборочная дисперсия s_0^2 является несмещенной оценкой дисперсии* σ^2.

Для некоторых задач математической статистики может существовать несколько несмещенных оценок. Обычно предпочтение отдают

той, которая обладает наименьшим рассеянием (дисперсией). Несмещенная оценка $\hat{\theta}$ параметра θ, обладающая минимальной дисперсией среди всех несмещенных оценок для θ, называется *эффективной*.

Пусть $D(\hat{\theta})$ — минимальная дисперсия, а $D(\hat{\theta}_\alpha)$ — дисперсия любой другой несмещенной оценки $\hat{\theta}_\alpha$ параметра θ. Тогда по определению эффективность оценки $\hat{\theta}$ равна $\frac{D(\hat{\theta})}{D(\hat{\theta}_\alpha)}$. Ясно, что $0 \leqslant \leqslant \frac{D(\theta)}{D(\hat{\theta}_\alpha)} \leqslant 1$.

Часто оценка становится эффективной с увеличением объема n выборки. Предельная эффективность оценки при $n \to \infty$ называется *асимптотической эффективностью*. Если асимптотическая эффективность равна единице, оценка называется *асимптотически эффективной*.

В примере 3 показано, что модифицированная выборочная дисперсия s_0^2 является эффективной оценкой дисперсии σ^2 взаимно независимых с. в. с одинаковыми м. о. и дисперсией. Из равенства (19.15) следует, что выборочная дисперсия s^2 является асимптотически эффективной оценкой дисперсии σ^2 таких с. в. с одинаковыми м. о. и дисперсией.

Замечание. Если оценка $\hat{\theta}$ смещенная, то малость ее дисперсии еще не говорит о малости ее погрешности. Взяв, например, в качестве оценки параметра θ некоторое число $\hat{\theta}_0$, получим оценку даже с нулевой дисперсией. Однако в этом случае ошибка (погрешность) $\hat{\theta}_0 - \theta$ может быть сколь угодно большой.

Оценка $\hat{\theta}$ называется *состоятельной* или *асимптотически состоятельной*, если с увеличением объема выборки ($n \to \infty$) оценка сходится по вероятности к точному значению параметра θ, т. е. если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} P(|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon) = 1. \tag{19.16}$$

Состоятельность оценки $\hat{\theta}$ параметра θ означает, что с ростом n объема выборки качество оценки $\hat{\theta}$ улучшается.

Пример 4. В схеме испытаний Бернулли возьмем в качестве оценки вероятности p частоту m/n появления события в каждом отдельном испытании. Согласно формуле (18.167), заключаем, что частота m/n является состоятельной оценкой вероятности p.

Пример 5. Согласно теореме 18.6 Чебышева, среднее арифметическое $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ является состоятельной оценкой среднего арифметического $\bar{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} M(X_i)$ математических ожиданий $M(X_i)$ с. в. X_i с равномерно ограниченными дисперсиями.

Методы нахождения точечных оценок. Универсального метода нахождения оценки параметра не существует. Имеется несколько хорошо зарекомендовавших себя методов нахождения этих оценок. Рассмотрим некоторые из них.

1. *Метод моментов (Пирсона)**. Пусть известен закон распределения с. в. X, содержащий неизвестные параметры $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$. Произведем выборку объема n этой с. в. По методу моментов r выборочных моментов приравниваются к r первым моментам с. в. X. Из полученной системы уравнений и находим оценки $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_r$ параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$. Как правило, эти оценки состоятельны.

Теоретическим обоснованием метода моментов служит закон больших чисел, согласно которому для рассматриваемого случая при большом объеме n выборки выборочные моменты близки к истинным моментам генеральной совокупности. Например, пусть X — с. в., распределенная по нормальному закону $N(m, \sigma^2)$. Известно, что $m = M(X) = \nu_1$ — начальный момент, а $\sigma^2 = D(X)$ — центральный момент μ_2. Согласно формуле (19.7), ν_1 можно оценить выборочным начальным моментом первого порядка, а μ_2 — выборочным центральным моментом второго порядка. Тем самым по методу моментов неизвестное математическое ожидание m оценивается средним арифметическим $\overline{X}$, а дисперсия — выборочной дисперсией s^2.

Пример 6. С. в. X распределена по показательному закону с плотностью вероятностей $f(x, \theta) = \theta e^{-\theta x}$, $x \geqslant 0$. По результатам выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ оценить параметр θ.

□ Найдем начальный момент первого порядка:

$$\nu_1 = m_x = \int_0^\infty x f(x, \theta) dx = \theta \int_0^\infty x e^{-\theta x} dx = \frac{1}{\theta}.$$

Выборочный же начальный момент первого порядка

$$\nu_1^* = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Отсюда и из предыдущего равенства получаем

$$(\nu_1^* = \nu_1) \Rightarrow \left(\bar{x} = \frac{1}{\theta}\right) \Rightarrow \left(\theta = \frac{1}{\bar{x}}\right).$$

2. *Метод максимального правдоподобия (МП-метод)*. Этот метод разработан Р. Э. Фишером**. Оценки, получаемые с его помощью, как правило, являются наиболее надежными и особенно предпочтительны в случае малого числа наблюдений.

Метод максимального правдоподобия состоит в определении оценок $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$, максимизирующих функцию правдоподобия $L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$. Эта функция строится следующим образом. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — результаты наблюдений с. в. $X_1, X_2, \ldots, X_n$, совместное распределение вероятностей которых зависит от неизвестных параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$, т. е. представляет собой условную плотность вероятностей $P(x_1, x_2, \ldots, x_n | \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$. Условная плотность совместного распределения вероятностей с. в. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называ-

* К. Пирсон (1857—1936) — английский математик.

** Р. Э. Фишер (1890—1962) — английский математик.

ется *функцией правдоподобия*. При фиксированных значениях выборки x_1, x_2, ..., x_n функция правдоподобия является только функцией неизвестных параметров, т. е.

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n|\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) = L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k).$$

По методу максимального правдоподобия в качестве оценок для $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ выбираются такие значения $\theta_1 = \hat{\theta}_1$, $\theta_2 = \hat{\theta}_2$, ..., $\theta_k = \hat{\theta}_k$, при которых «наблюдаемые» величины x_1, x_2, ..., x_n наиболее вероятны, другими словами, значения $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, ..., $\hat{\theta}_k$ максимизируют функцию правдоподобия $L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$.

Пусть X — дискретная с. в. и $P(X = x_i) = p_i(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, — ее закон распределения вероятностей. Тогда вероятность того, что элементы выборки (независимые с. в. X_1, X_2, ..., X_n) примут конкретные значения x_1, x_2, ..., x_n, определяется равенством

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2)\cdots P(X_n = x_n) = p_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)p_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)\cdots p_n(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n).$$

Поскольку эта функция определяет совместное распределение вероятностей, то, следовательно, она является функцией правдоподобия. Таким образом, для дискретной с. в. с законом распределения $P(X = x_i) = p_i(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ функция правдоподобия определяется соотношением

$$L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) = P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2)\cdots P(X_n = x_n) = p_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)p_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)\cdots p_n(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k). \quad (19.17)$$

При оценке параметров распределения непрерывной с. в. X с плотностью распределения $f(x; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ по МП-методу функция правдоподобия определяется следующим образом:

$$L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k), \quad (19.18)$$

где $\prod_{i=1}^{n} a_i$ — произведение $a_1 a_2 \ldots a_n$.

Оценка параметров θ_i, построенная по выборочным значениям с. в. X и максимизирующая функцию $L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$, называется *оценкой максимального правдоподобия* или *МП-оценкой*.

Для упрощения вычислений МП-оценок часто бывает удобным рассматривать логарифм функции правдоподобия, т. е. $\ln L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$. Ясно, что логарифм функции правдоподобия в силу монотонности логарифма не изменит точки максимума самой функции.

При максимизации функции (19.18) x_i считаются фиксированными, а МП-оценки параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ определяются решением системы уравнений

$$\frac{\partial L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)}{\partial \theta_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k, \quad (19.19)$$

или

$$\frac{\partial \ln L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)}{\partial \theta_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k. \quad (19.20)$$

Системы (19.19) или (19.20) называются *системами уравнений правдоподобия.*

Пример 7. Найти МП-оценку параметра $\theta = \lambda$ распределения Пуассона

$$P_m(X = x_i) = \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!},$$

где x_i — число появлений событий в i-м опыте, $i = 1, 2, \ldots, n$ (опыт состоит из m испытаний).

□ Составим функцию правдоподобия (19.18):

$$L(\lambda) = \frac{\lambda^{x_1} e^{-\lambda}}{x_1!} \frac{\lambda^{x_2} e^{-\lambda}}{x_2!} \ldots \frac{\lambda^{x_n} e^{-\lambda}}{x_n!} = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i} e^{-n\lambda}}{x_1! x_2! \cdots x_n!}, \tag{19.21}$$

откуда

$$\ln L(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln \lambda - n\lambda - \ln(x_1! x_2! \cdots x_n!).$$

Отсюда, согласно равенству (19.20), уравнение правдоподобия можно записать:

$$\frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} x_i - n = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}.$$

Далее, так как $\dfrac{\partial^2 L(\lambda)}{\partial \lambda^2} = -\dfrac{1}{\lambda^2} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i < 0$, то при $\lambda = \bar{x}$ функция правдоподобия (19.21) имеет максимум.

Таким образом, согласно МП-методу, в качестве МП-оценки параметра λ-распределения Пуассона надо взять выборочное среднее $\bar{x}$.

Пример 8. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые с. в., распределенные по нормальному закону $N(\theta, \sigma^2)$. Оценить по МП-методу неизвестные параметры θ и σ.

□ В рассматриваемом случае функция правдоподобия имеет вид

$$L(\theta, \sigma) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(-x_i - \theta)^2}{2\sigma^2} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta)^2 \right), \tag{19.22}$$

откуда

$$\ln L(\theta, \sigma) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - n \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta)^2.$$

Для этой функции составляем систему уравнений правдоподобия (19.20):

$$\frac{\partial \ln L(\theta, \sigma)}{\partial \theta} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta) = 0;$$

$$\frac{\partial \ln L(\theta, \sigma)}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta)^2 = 0.$$

Отсюда

$$\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}; \quad \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = s^2.$$

Проверим выполнение достаточного условия экстремума функции правдоподобия при $\theta = \bar{x}$ и $\sigma^2 = s^2$ с помощью матрицы Гессе. Имеем

$$H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \ln L(\theta, \sigma)}{\partial \theta^2} & \dfrac{\partial^2 \ln L(\theta, \sigma)}{\partial \theta \partial \sigma} \\ \dfrac{\partial^2 \ln L(\theta, \sigma)}{\partial \sigma \partial \theta} & \dfrac{\partial^2 \ln L(\theta, \sigma)}{\partial \sigma^2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\dfrac{n}{\sigma^2} & -\dfrac{2}{\sigma^3}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) \\ -\dfrac{2}{\sigma^3}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) & \dfrac{n}{\sigma^2} - \dfrac{3}{\sigma^4}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{2n}{\sigma^2} \end{bmatrix},$$

так как, согласно теореме 19.1, $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$, а $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = n\sigma^2$. В силу отрицательной определенности матрицы H заключаем, что функция правдоподобия (19.22) при $\theta = \bar{x}$ и $\sigma^2 = s^2$ достигает максимума.

Итак, если с. в. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ распределены по нормальному закону $N(\theta, \sigma^2)$, то по МП-методу параметр θ следует оценивать средним арифметическим $\bar{x}$, а дисперсию σ^2 — выборочной дисперсией s^2.

Заметим, что МП-метод не всегда дает оценки, удовлетворяющие требованиям несмещенности, эффективности и состоятельности. Так, оценка дисперсии, полученная в примере 8, есть выборочная дисперсия s^2, удовлетворяющая лишь условию состоятельности, поэтому к оценкам, получаемым этим методом, следует относиться критически. Кроме того, МП-метод не всегда удается использовать даже в простых случаях.

Пример 9. Пусть с. в. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ взаимно независимы и каждая из этих величин распределена с плотностью вероятностей $(0 < \omega < 1)$

$$f(x) = \frac{\omega}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\sigma_1^2}} + \frac{1-\omega}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(x-\theta_2)^2}{2\sigma_2^2}},$$

где $\omega, \theta_1, \theta_2, \sigma_1, \sigma_2$ — параметры.

Функция правдоподобия

$$L(\omega, \theta_1, \theta_2, \sigma_1, \sigma_2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \omega, \theta_1, \theta_2, \sigma_1, \sigma_2). \qquad (19.23)$$

Положим $\theta_1 = x_i$ и $\theta_2 = x_i$ для некоторого $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$f(x_i) = \frac{\omega}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} + \frac{1-\omega}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} > \frac{\omega}{\sqrt{2\pi}\sigma_1},$$

а для $i \neq j$

$$f(x_j) = \frac{\omega}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x_j - x_i)^2}{2\sigma_1^2}} + \frac{1-\omega}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(x_j - x_i)^2}{2\sigma_2^2}} > \frac{1-\omega}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(x_j - x_i)^2}{2\sigma_2^2}}.$$

Отсюда для функции правдоподобия (19.23) получим оценку

$$L(\omega, \theta_1, \theta_2, \sigma_1, \sigma_2) > \frac{\omega(1-\omega)^{n-1}}{(\sqrt{2\pi})^n \sigma_1 \sigma_2^{n-1}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i \neq j}\frac{(x_j - x_i)^2}{\sigma_2^2}\right).$$

Из этой оценки следует, что функцию правдоподобия (19.23) можно сделать сколь угодно большой, выбирая достаточно малым параметр σ_1 или σ_2. Следовательно, множества значений параметров ω, θ_1, θ_2, σ_1, σ_2, максимизирующих функцию правдоподобия, не существует.

3. *Метод наименьших квадратов.* Пусть требуется измерить некоторую величину X и по результатам n измерений $X_i = \theta + \varepsilon_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где ε_i — ошибки измерений, а θ — точное значение измеряемой величины.

По методу наименьших квадратов требуется найти такое значение $\hat{\theta}$, являющееся оценкой неизвестного параметра θ, которое минимизирует функцию

$$u(\theta) = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \theta)^2 = \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2,$$

т. е. минимизирует сумму квадратов отклонений выборочных данных от параметра θ.

Пример 10. По методу наименьших квадратов найти оценку $\hat{\theta}$ выборочного среднего $\bar{x}$ генеральной совокупности.

□ Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — выборка. Составим функцию $u(\theta) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta)^2$ и найдем ее минимум. Из необходимых условий минимума имеем

$$u'(\theta) = -2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta) = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i = \bar{x}.$$

Пример 11. Пусть с. в. X_1, X_2, X_3 определяются параметрами θ_1 и θ_2 с помощью соотношений $X_1 = \theta_1 + \varepsilon_1$, $X_2 = 2\theta_1 - \theta_2 + \varepsilon_2$, $X_3 = \theta_1 + 2\theta_2 + \varepsilon_3$, где ε_1, ε_2, ε_3 — погрешности, причем $M(\varepsilon_i) = 0$, $i = 1, 2, 3$. Найти оценку параметров θ_1 и θ_2, минимизирующих сумму квадратов погрешностей $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2$.

□ Сумма квадратов отклонений $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = (X_1 - \theta_1)^2 + (X_2 - 2\theta_1 + \theta_2)^2 + (X_3 - \theta_1 - 2\theta_2)^2 = u(\theta_1, \theta_2)$. Минимизируем эту функцию. Из необходимых условий экстремума функции двух переменных имеем:

$$\left.\begin{aligned} u'_{\theta_1} &= -2(X_1 - \theta_1) - 4(X_2 - 2\theta_1 + \theta_2) - 2(X_3 - \theta_1 - 2\theta_2) = 0; \\ u'_{\theta_2} &= 2(X_2 - 2\theta_1 + \theta_2) - 4(X_3 - \theta_1 - 2\theta_2) = 0 \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} 6\theta_1 + 3\theta_2 &= 2X_1 + 4X_2 + 2X_3; \\ 10\theta_2 &= -2X_2 + 4X_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\theta}_1 = \dfrac{1}{6}(X_1 + 2X_2 + X_3); \\ \hat{\theta}_2 = \dfrac{1}{5}(2X_3 - X_2). \end{cases}$$

Составим матрицу Гессе:

$$H = \begin{bmatrix} u''_{\theta_1^2} & u''_{\theta_1\theta_2} \\ u''_{\theta_1\theta_2} & u''_{\theta_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Она положительно определена при любых θ_1 и θ_2. Поэтому из достаточных условий минимума заключаем, что найденные значения $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\theta}_2$ являются искомыми оценками, минимизирующими сумму квадратов отклонений.

Интервальные оценки. После получения точечной оценки $\hat{\theta}$ параметра θ желательно иметь данные о надежности этой оценки. Например, указать интервал (θ_1, θ_2), внутри которого с вероятностью p находится точное значение оцениваемого параметра θ. Задачу получения такого интервала называют *интервальным оцениванием,* а сам интервал — *доверительным.*

Для ее решения заранее выбирают число α, $0<\alpha<1$, называемое *коэффициентом доверия* или *уровнем значимости,* и находят два других числа θ_1 и θ_2, зависящих от оценки $\hat{\theta}$, так что

$$P(\theta_1<\theta<\theta_2)=1-\alpha. \qquad (19.24)$$

Число $1-\alpha$ называется *доверительной вероятностью* или *надежностью,* с которой оцениваемый параметр θ покрывается интервалом (θ_1, θ_2). В связи с этим говорят, что доверительный интервал (θ_1, θ_2) накрывает оцениваемый параметр с вероятностью $1-\alpha$ или в $100\,(1-\alpha)$ % случаев. Границы θ_1 и θ_2 доверительного интервала (θ_1, θ_2) называются *доверительными.* От доверительных интервалов, основанных на всех возможных выборках объема n, ожидается, что $100\,(1-\alpha)$ % их содержит истинное значение θ. На практике обычно выбираются значения $\alpha=0{,}1$; 0,05; 0,001, что соответствует 90-, 95- и 99 %-ным доверительным интервалам соответственно.

В прикладных статистических задачах длина доверительного интервала играет важную роль: чем меньше его длина, тем точнее оценка. Если длина этого интервала велика, то ценность такой оценки незначительна.

Вероятность попадания в интервал. Выведем формулу для вероятности попадания с. в., распределенной по нормальному закону $N(m, \sigma^2)$, в данный интервал (α, β). Поскольку плотность распределения вероятностей нормально распределенной с. в. есть

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

а вероятность попадания с. в. в интервал (α, β) равна $\int\limits_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$, то искомая вероятность

$$P(\alpha<X<\beta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{\alpha}^{\beta}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Введя замены $x=m+\sigma z$, $z=(x-m)/\sigma$, получим

$$P(\alpha<X<\beta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{(\alpha-m)/\sigma}^{(\beta-m)/\sigma}e^{-z^2/2}dz=\Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right),$$

где Φ — интеграл ошибок (18.38).

В частности, если интервал (α, β) симметричен относительно м. о. m, т. е. $\alpha=m-\varepsilon$, $\beta=m+\varepsilon$, то последняя формула в силу нечетности функции $\Phi(x)$ приводится к виду

$$P(m-\varepsilon<X<m+\varepsilon)=P(|X-m|<\varepsilon)=\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)=$$

$$=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Пример 12. Положив в последней формуле $\varepsilon=3\sigma$ и пользуясь табл. 19.2 значений функции $\Phi(x)$, получаем

$$P(|X-m|<3\sigma)=2\Phi(3)=0{,}997.$$

Таким образом, с вероятностью 99,7 % значение нормально распределенной с. в. X отклоняется от м. о. не больше чем на 3σ. Другими словами, в среднем в тех опытах из 1000 отклонение с. в. X от м. о. будет более 3σ. Поэтому областью практически возможных значений нормально распределенных с. в. X считается обычно интервал $(m-3\sigma,\ m+3\sigma)$. В этом и состоит *«правило трех сигм»*.

Доверительный интервал для м. о. при неизвестной дисперсии нормально распределенной генеральной совокупности. Пусть независимые с. в. X_i, $i=1, 2, \ldots, n$, распределены по нормальному закону $N(m, \sigma^2)$, причем дисперсия σ^2 известна. Найдем доверительный интервал для математического ожидания m.

Как известно, наилучшей оценкой м. о. m является выборочное среднее $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, имеющее, согласно следствию из теоремы 19.2, нормальное распределение $N(m, \sigma^2/n)$. Рассмотрим с. в.

$$Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)\frac{\sqrt{n}}{\sigma}=(\overline{X}-m)\frac{\sqrt{n}}{\sigma}. \qquad (19.25)$$

Так как $M(Y)=M\left((\overline{X}-m)\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right)=\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(M(\overline{X})-m)=\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(m-m)=0$ и $D(Y)=D\left((\overline{X}-m)\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right)=\frac{n}{\sigma^2}D(\overline{X})=\frac{n}{\sigma^2}\frac{\sigma^2}{n}=1$, то с. в. (19.25) имеет нормальное распределение $N(0,1)$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ по интегральной теореме Муавра — Лапласа вероятность

$$P(|Y|<\varepsilon)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}e^{-z^2/2}dz=\Phi(\varepsilon)-\Phi(-\varepsilon)=2\Phi(\varepsilon),$$

где $\Phi(x)$ — интеграл ошибок (18.38). Отсюда с учетом равенства (19.25) получим $P\left(|\overline{X}-m|<\frac{\varepsilon\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\Phi(\varepsilon)$. Пусть эта вероятность равна $1-\alpha$, $0<\alpha<1$. Решив уравнение $2\Phi(\varepsilon)=1-\alpha$, найдем значение ε, при котором выполняется равенство

$$P\left(|\overline{X}-m|<\frac{\varepsilon\sigma}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha. \qquad (19.26)$$

Это равенство определяет вероятность того, что с доверительной вероятностью $1-\alpha$ среднее значение $\bar{X}$ отклоняется от м. о. m генеральной совокупности на величину $\varepsilon\sigma/\sqrt{n}$. Таким образом, с доверительной вероятностью $1-\alpha=2\Phi(\varepsilon)$ можно утверждать, что интервал

$$\left(\bar{X}-\frac{\varepsilon\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+\frac{\varepsilon\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{\varepsilon\sigma}{\sqrt{n}},\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i+\frac{\varepsilon\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad (19.27)$$

является доверительным для оценки м. о.

В табл. 19.3 приводятся доверительные интервалы для м. о. нормально распределенных с. в. с известной дисперсией σ (n — объем выборки).

Таблица 19.3

Доверительный интервал	Надежность	Вероятность ошибки
$\bar{X}\pm 1{,}645\sigma/\sqrt{n}$	0,9 (90 %)	0,1 (10 %)
$\bar{X}\pm 1{,}960\sigma/\sqrt{n}$	0,95 (95 %)	0,05 (5 %)
$\bar{X}\pm 2{,}576\sigma/\sqrt{n}$	0,99 (99 %)	0,01 (1 %)

Пример 13. Найти доверительный интервал для оценки м. о. m с надежностью 0,95, если $\bar{X}=75{,}14$, $\sigma=9$, $n=81$.

□ Из табл. 19.3 и формулы (19.27) получаем интервал

$$\left(\bar{X}-1{,}960\cdot\frac{9}{\sqrt{81}};\ \bar{X}+1{,}960\cdot\frac{9}{\sqrt{81}}\right)=(73{,}18;\ 77{,}10).$$

Пример 14. Глубина дорожки подшипника измеряется оптическим глубиномером, систематическая ошибка которого равна нулю, а случайные ошибки распределены нормально со среднеквадратичным отклонением $\sigma=20$ мкм. Сколько надо сделать измерений, чтобы ошибка измерения была не более 15 мкм при доверительной вероятности 0,9?

□ По условию задачи искомая ошибка $|\bar{X}-m|\leqslant 15$, $\sigma=20$. Для надежности 0,9 из уравнения $2\Phi(\varepsilon)=0{,}9$ и по прил. 2 находим $\varepsilon=1{,}645$. Приравняв максимальную ошибку 15 к $\varepsilon\sigma/\sqrt{n}$, получим $15=\dfrac{1{,}645\cdot 20}{\sqrt{n}}\Rightarrow n>4$, т. е. минимальный объем выборки (число измерений) равно 5.

При отыскании доверительных интервалов большую роль в статистике играют распределения хи-квадрат и t-распределение Стьюдента*.

Распределение хи-квадрат. Пусть X_1, X_2, ..., X_n — независимые нормально распределенные по закону $N(0,\ 1)$ с. в. и $\chi_n^2=X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2$. Закон распределения с. в. χ_n^2 называется *хи-квадрат распределением с n степенями свободы* или *χ_n^2 — распределением Пирсона.*

Убедимся, что с. в. $Y=\chi_n^2$ имеет плотность вероятностей

* Стьюдент — псевдоним английского статистика В. С. Госсета (1886—1937), открывшего это распределение в 1908 г.

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\,x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0;\\ 0, & x<0,\end{cases}\qquad(19.28)$$

где $\Gamma(x)=\int\limits_0^\infty e^{-y}y^{x-1}dy$ — гамма-функция.

Обозначим через $F_n(x)$ функцию распределения с. в. $Y=\chi_n^2$. Доказательство формулы (19.28) проведем по индукции.

При $n=1$ имеем $Y=\chi_1^2=X_i^2$, где X_1 — с. в., распределенная по закону $N(0,\ 1)$, т. е. $F(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-z^2/2}dz$ — ее функция распределения. Тогда с. в. $Y=X_1^2$, согласно равенству (18.96), имеет функцию распределения

$$F_1(x)=F(\sqrt{x})-F(-\sqrt{x})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\int\limits_{-\infty}^{\sqrt{x}}e^{-z^2/2}dz-$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{\sqrt{x}}e^{-z^2/2}dz\Big)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\sqrt{x}}e^{-z^2/2}dz,\ x>0.$$

Отсюда, так как $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$,

$$f_1(x)=F_1'(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-x/2}\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2^{1/2}\Gamma(1/2)}x^{-1/2}e^{-x/2},\ x>0,$$

Пусть теперь формула (19.28) верна при $k=n-1$:

$$f_{n-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\frac{n-3}{2}}e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}, & x>0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

Убедимся, что из этого предложения вытекает справедливость формулы (19.28) и при $k=n$. Имеем $\chi_n^2=X_1^2+\ldots+X_{n-1}^2+X_n^2=\chi_{n-1}^2+X_n^2$. Так как X_i — независимые с. в., то и с. в. χ_{n-1}^2 и X_n^2 тоже независимые (см. § 18.6). Согласно примеру 8, § 18.6, плотность вероятностей суммы двух независимых с. в. χ_{n-1}^2 и X_n^2 дается сверткой соответствующих плотностей вероятностей, т. е. $f_n(x)=f_{n-1}(x)*f_1(x)$, где $f_1(x)=f(x)=F'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ — плотность вероятностей с. в. $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$, так как они распределены одинаково по закону $N(0,\ 1)$. Применяя формулу свертки, получаем

$$f_n(x)=\int\limits_0^x f_{n-1}(\tau)f_1(x-\tau)d\tau=$$

$$= \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x \tau^{\frac{n-3}{2}}(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}d\tau = |\tau = xt,\ d\tau = xdt| =$$

$$= \frac{e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{n-2}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 t^{\frac{n-1}{2}-1}(1-t)^{\frac{1}{2}-1}dt =$$

$$= \frac{e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{n}{2}-1}B\left(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}\right)}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{n-1}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},\ x>0,$$

так как бета-функция $B\left(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)/\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$.

Итак, формула (19.28) доказана по индукции.

Найдем теперь м. о. и дисперсию распределения χ^2. Для этого вычислим начальные моменты порядка r. Имеем

$$\nu_r = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \int_0^\infty x^{\frac{n+2r}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}dx = |x = 2t| =$$

$$= \frac{2^{n/2+r}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \int_0^\infty t^{(n/2+r)-1}e^{-t}dt = \frac{2^r}{\Gamma(n/2)}\Gamma\left(\frac{n}{2}+r\right).$$

Отсюда при $r = 1; 2$ получим соответственно:

$$m = \nu_1 = \frac{2}{\Gamma(n/2)}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = 2 \cdot \frac{n}{2}\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n/2)} = n;$$

$$\nu_2 = \frac{2^2\Gamma\left(\frac{n}{2}+2\right)}{\Gamma(n/2)} = \frac{2^2\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma(n/2)} =$$

$$= \frac{2^2\left(\frac{n}{2}+1\right)\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(n/2)} = n(n+2).$$

Тогда дисперсия $\sigma^2 = \nu_2 - \nu_1^2 = n(n+2) - n^2 = 2n$.

Итак, для хи-квадрат распределения

$$m = n;\ \sigma^2 = 2n. \tag{19.29}$$

Замечания. 1. Плотность $f_n(x)$ распределения хи-квадрат как функция параметра n обладает при малых n длинным «правым хвостом», а при больших n становится почти симметричной (рис. 19.6). Эти кривые называются *кривыми Пирсона.*

2. Определим теперь понятие p-квантили с. в. X. *Квантилью,* отвечающей вероятности p, или p-квантилью (100p-я процентиль) называется значение $x = x_p$ с. в. X, при котором

$$F(x_p) = P(X < x_p) = p, \tag{19.30}$$

где $F(x)$ — функция распределения с. в. X. Ясно, что $\frac{1}{2}$-квантиль есть медиана $\mathrm{Me}(X)$. Квантили x_p и x_{1-p} называются симметричными. Если распределение симметрично относительно нуля, то $x_p = -x_{1-p}$. Применение квантилей основывается, согласно формуле (18.46), на равенстве

$$P(x_p \leqslant X \leqslant x_q) = q - p. \tag{19.31}$$

Для χ^2-распределения с n степенями свободы p-квантиль обозначается $\chi^2_{p;\,n}$. Избранные квантили распределения χ^2 для некоторого диапазона степеней свободы n приведены в прил. 3. Например,

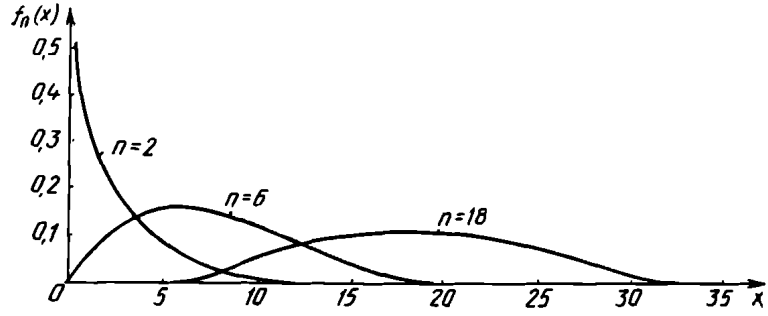


Рис. 19.6

квантиль $\chi^2_{0,20;\,9} = 12{,}242$ означает выполнение равенства $P(X < 12{,}242) = 0{,}20$, а квантиль $\chi^2_{0,001;\,28} = 56{,}893$ — равенства $P(X < 56{,}893) = 0{,}001$.

Распределение Стьюдента. Пусть U и V — независимые с. в., причем U — нормально распределенная с. в. по закону $N(0, 1)$, а V имеет распределение χ^2 с n степенями свободы. Можно показать, что с. в. $T = \dfrac{U}{\sqrt{V/n}} = U\sqrt{\dfrac{n}{V}}$ имеет плотность вероятностей

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}, \quad |t| < \infty. \qquad (19.32)$$

Распределение вероятностей с. в. T с плотностью (19.32) называется *распределением Стьюдента* с n степенями свободы или *t-распределением Стьюдента*. Графики функции (19.32) называются кривыми Стьюдента. При любом $n = 1, 2, \ldots$ они симметричны относительно оси ординат (рис. 19.7), поэтому при любом n м. о. $M(T) = 0$. Дисперсия с. в. T равна $D(T) = n/(n-2)$. Можно показать, что при $n \to \infty$ плотность вероятностей распределения Стьюдента (19.32) сходится к плотности вероятностей нормального распределения $N(0,1)$, причем уже при $n > 30$ распределение Стьюдента практически можно заменить нормальным распределением.

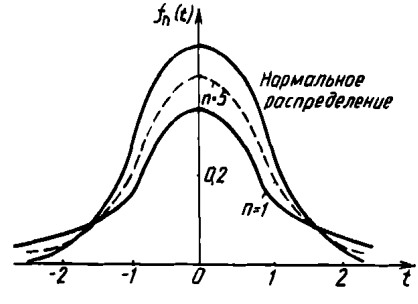


Рис. 19.7

В прил. 4 приведены значения квантилей распределения Стьюдента $t_{p;\,n}$ в зависимости от числа n степеней свободы и заданной вероятности $p = 1 - \alpha$, где α — коэффициент доверия.

Доверительный интервал для математического ожидания с. в., имеющей нормальное распределение при неизвестной дисперсии. Пусть требуется оценить м. о. генеральной совокупности, имеющей нормальное распределение $N(m, \sigma^2)$ при неизвестной дисперсии σ^2. Известно, что для выборки $X_1, X, \ldots, X_n$ выборочное среднее $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, согласно теореме 19.2, имеет нормальное распределение $N(m, \sigma^2/n)$. Рассмотрим с. в.

$$U = \frac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - m}{\sigma}\sqrt{n}; \quad V = \frac{ns^2}{\sigma^2},$$

где $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ — выборочная дисперсия. Ясно, что $M(U) = 0$, а $D(U) = 1$, т. е. с. в. U распределена по нормальному закону $N(0, 1)$. Покажем, что с. в. $V = ns^2/\sigma^2$ имеет распределение χ^2_{n-1}.

Заметим, что выборочная дисперсия $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ не изменится, если каждую из величин X_i заменить $X_i' = X_i - m$, для которых $M(X_i') = M(X_i - m) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $M(X_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда для вектора $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$ будем иметь $M(\mathbf{X}) = 0$, а корреляционная матрица $K(\mathbf{X}) = \sigma^2 E$, где E — единичная матрица.

Пусть теперь A — ортогональная $n \times n$-матрица, у которой последняя строка имеет вид $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, и $\mathbf{Y} = A\mathbf{X}$. Отсюда для n-й координаты Y_n вектора $\mathbf{Y}$ получим:

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i = \sqrt{n}\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \sqrt{n}\,\bar{X};$$

$$M(\mathbf{Y}) = AM(\mathbf{X}) = 0; \quad K(\mathbf{Y}) = AK(\mathbf{X})A^T = AEA^T\sigma^2 = \sigma^2 E.$$

Координаты Y_j вектора $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)^T$ как линейные комбинации нормально распределенных с. в. X_i тоже нормально распределены по закону $N(0, \sigma^2)$. А с. в. Y_i/σ имеют распределение $N(0, 1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Так как матрица A ортогональна, получаем

$$(\mathbf{Y}, \mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = (\mathbf{X}, \mathbf{X}).$$

Тогда

$$\frac{ns^2}{\sigma^2} = \frac{n}{\sigma^2}\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - Y_n^2\right) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n-1} Y_i^2 = \sum_{i=1}^{n-1}(Y_i/\sigma)^2.$$

Согласно определению, сумма $\sum_{i=1}^{n-1}(Y_i/\sigma)^2 = \frac{ns^2}{\sigma^2}$ имеет распределение χ^2_{n-1}. Так как $\overline{X}_n$ и s^2 независимые с. в., то с. в.

$$T = U\sqrt{\frac{n-1}{V}} = \frac{X-m}{s\sqrt{n}} \tag{19.33}$$

имеют распределение Стьюдента с $n-1$ степенями свободы, которое не зависит от дисперсии σ^2 генеральной совокупности.

Из прил. 4 распределения Стьюдента по выбранной доверительной вероятности $p = 1-\alpha$ и числу степеней свободы $n-1$ находим такое t_p, для которого выполняется условие $P(|T| < t_p) = p$ (рис. 19.8). Подставив вместо T выражение (19.33) и разрешив

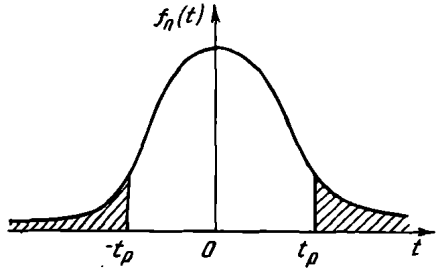


Рис. 19.8

полученное неравенство относительно m, получим $P(\overline{X} - t_p\frac{s}{\sqrt{n}} < m < \overline{X} + t_p\frac{s}{\sqrt{n}}) = p$.

Таким образом, доверительный интервал для м. о. m нормального закона распределения с неизвестной дисперсией имеет вид

$$\left(\overline{X} - \frac{t_p s}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + \frac{t_p s}{\sqrt{n}}\right) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{st_p}{\sqrt{n}},\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{st_p}{\sqrt{n}}\right). \tag{19.34}$$

Пример 15. Пусть в результате измерения диаметры четырех однотипных подшипников оказались равными $x_1 = 0{,}25$, $x_2 = 0{,}24$, $x_3 = 0{,}26$, $x_4 = 0{,}25$. Считая распределение подшипников нормальным, найти доверительный интервал для истинного диаметра d подшипников с доверительной вероятностью $p = 0{,}95$.

□ По условию задачи $M(X) = 0{,}25$, $p = 0{,}95$, выборочное среднее $\overline{X} = \frac{1}{4}(0{,}25 + 0{,}24 + 0{,}26 + 0{,}25) = 0{,}25$. По формуле (19.2) выборочное среднее квадратичное $s = 0{,}082$. Из прил. 4 распределения Стьюдента при трех степенях свободы и $1 - p = 0{,}05 = \alpha$ находим квантиль $t_{0{,}95;\,3} = 3{,}182$. Следовательно, $\frac{st_p}{\sqrt{n}} = 0{,}082 \times \frac{3{,}182}{\sqrt{4}} \approx 0{,}13$. Отсюда, согласно формуле (19.34), искомый доверительный интервал есть $(0{,}25 - 0{,}13;\ 0{,}25 + 0{,}13) = (0{,}12;\ 0{,}38)$.

Таким образом, можно утверждать, что примерно в 95 % истинный диаметр подшипников находится в интервале (0,12; 0,38).

Задачи и упражнения

1. Предельная нагрузка для выборки из пяти стальных стержней равна соответственно 16, 13, 11, 14, 16 условных единиц. Известно, что совокупность подчиняется нормальному закону. Найти: а) несмещенную и эффективную оценки средней предельной нагрузки совокупности стальных стержней; б) несмещенную и неэффективную оценки среднего совокупности; в) смещенную и несмещенную оценки дисперсии.

2. Найти МП-оценки параметров θ_1 и θ_2 *двойного распределения Лапласа* с плотностью вероятностей

$$f(x)=\frac{1}{2\theta_2}e^{-\frac{|x-\theta_1|}{\theta_2}},\quad \theta_2>0.$$

3. Зависимость между с. в. X и Y имеет вид $y=a_0+a_1x+a_2x^2$. Методом наименьших квадратов найти оценки параметров a_0, a_1, a_2 по данным выборки

x	0	2	4	6	8	10
y	5	−1	−0,5	1,5	4,5	8,5

4. Выборка измерений роста 100 студентов дала следующие результаты: средний рост $\bar{x}=1{,}73$, а несмещенная выборочная дисперсия $s^2=0{,}00245$. Найти: а) 95 %-ный; б) 99 %-ный доверительные интервалы для среднего этой совокупности студентов.

5. Проведено 10 независимых испытаний с. в. X, распределенных нормально по закону $N(0, 4)$. Найти вероятность того, что сумма квадратов результатов испытания превысит 16.

6. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного м. о. в выборке объема $n=9$ при $p=0{,}95$, $\bar{x}=6$, $s^2=9$.

19.3. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ

Понятие гипотезы. *Статистическая гипотеза* — это утверждение относительно распределения с. в. генеральной совокупности. Часто гипотезы формулируются как предложения о неизменности некоторого параметра совокупности, об отсутствии его смещения или же относительно изменения этого параметра в нескольких совокупностях. Например, можно рассмотреть гипотезу о размерах изготовляемых деталей, об эффективности лекарства и т. д. Гипотеза, подлежащая проверке, называется *нулевой* или *основной* и обозначается H_0. Запись $H:\omega\in W$ означает, что выдвинута гипотеза H о том, что элемент ω принадлежит W.

Наряду с нулевой гипотезой рассматривают так называемую *альтернативную гипотезу,* заключающуюся в том, что если нулевая гипотеза отвергается, то принимается альтернативная, которая обозначается H_1. Например, для нулевой гипотезы $H_0:\omega=\omega_0$ альтернативной является гипотеза $H_1:(\omega\neq\omega_0)\cup(\omega<\omega_0)\cup(\omega>\omega_0)$.

Гипотеза называется *простой,* если она точно определяет распределение с. в., в противном случае гипотеза называется *сложной.* Например, гипотеза $H_0:x=a$, утверждающая равенство параметра x заданной величине a, простая. Гипотеза же $H:x<a$ или $H:\alpha<x<\beta$ определяет область значений параметра x и, следовательно, является сложной.

Процедура проверки гипотез — это процесс, позволяющий для любого множества значений X_1, X_2, ..., X_n получить решение: принять или отклонить проверяемую гипотезу H_0. Правило, согласно которому проверяется гипотеза H_0, называется *статистической проверкой гипотезы* H_0.

Принимая или отклоняя гипотезу H_0, можно допустить ошибки двух родов: 1) отклонение гипотезы H_0, в то время как в действительности она верна; 2) принятие гипотезы H_0, в то время как верна на самом деле какая-то другая гипотеза H_1.

Пусть α — вероятность ошибки первого рода, а β — вероятность ошибки второго рода. Тогда можно сказать, что при большом количестве выборок доля ложных заключений равна α, если верна гипотеза H_0, и равна β, если верна гипотеза H_1. Например, в локации принято, что гипотеза H_0 — отсутствие цели, а гипотеза H_1 — наличие цели. Тогда принятие гипотезы H_0, когда на самом деле верна гипотеза H_1, называют пропуском сигнала, а вероятность принятия такого решения называется вероятностью пропуска $\beta = P(H_0|H_1)$. Величина $1-\beta$ называется вероятностью правильного обнаружения. Принятие гипотезы H_1, т. е. решения о том, что цель присутствует, когда эта гипотеза несправедлива и цели в действительности нет, называют ложной тревогой, а вероятность такого решения называется вероятностью ложной тревоги $\alpha = P(H_1|H_0)$.

Предположим, что рассматриваются основная H_0 и альтернативная H_1 гипотезы. Тогда ошибки первого и второго рода можно изобразить в виде следующей таблицы:

	H_0 верна	H_0 не верна
Отвергнуть H_0	Ошибка первого рода с вероятностью α	Верное решение с вероятностью $1-\beta$
Принять H_0	Верное решение с вероятностью $1-\alpha$	Ошибка второго рода с вероятностью β

Правило, по которому принимается решение принять или отклонить гипотезу H_0, называется *критерием* K. Так как решение принимается на основе выборки наблюдений с. в. X, то необходимо выбрать подходящую статистику (оценку), называемую в этом случае *статистикой* Z критерия K. Как правило, при проверке гипотезы $H_0: \theta = \theta_0$ в качестве статистики критерия выбирается оценка $\hat{\theta}$.

Статистическая проверка гипотезы основывается на том принципе, что маловероятные события считаются невозможными, а события с большой вероятностью считаются достоверными. Этот принцип реализуется следующим образом. Перед анализом выборки фиксируется уровень значимости α — вероятность ошибочного отклонения нулевой гипотезы. Обычно задаются значениями $\alpha = 0{,}05;\ 0{,}01;\ 0{,}001$.

Критерий, основанный на использовании заранее заданного уровня значимости, называется *критерием значимости*. Множество

всех значений статистики Z, при которых принимаются решения, отклоняющие гипотезу H_0, называется *критической областью*. Совокупность же значений статистики Z, при которых нулевую гипотезу принимают, называется *областью принятия гипотезы*. Точки, отделяющие критическую область от области принятия решений, называются *критическими*.

Схема статистической проверки гипотезы. Статистическая проверка гипотезы состоит из следующих этапов:

1) формулировка нулевой и альтернативной гипотез;
2) выбор соответствующего уровня значимости;
3) определение объема выборки n;
4) выбор статистики Z критерия для проверки гипотезы H_0;
5) определение критической области и области принятия гипотезы;
6) формулировка правила проверки гипотезы;
7) принятие статистического решения.

Проиллюстрируем эту схему на примере проверки гипотезы о среднем генеральной совокупности. Пусть из нормальной совокупности $N(m, \sigma^2)$ с неизвестным средним m и известной дисперсией σ^2 произведена выборка объема n. Требуется проверить гипотезу $H_0: m = m_0$, т. е. проверить предположение о равенстве среднего всей генеральной совокупности значению m_0.

Если гипотеза H_0 верна, то величина $z = \dfrac{\bar{x} - m_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ имеет стандартное нормальное распределение $N(0,1)$, поэтому z (или $\bar{x}$) может служить статистикой.

Пример 1. Предположим, что электроламповый завод гарантирует среднюю продолжительность безотказной работы лампочек в течение 800 ч со стандартным отклонением 120 ч. Из некоторой партии производится случайная выборка 25 лампочек, для которых средняя продолжительность работы равна 750 ч. Можно ли утверждать, что исследуемая партия лампочек не удовлетворяет требованиям гарантии?

□ Пусть m — средняя продолжительность горения лампочек во всей партии. Согласно схеме, имеем.

1. Нулевая гипотеза $H_0: m = 800$. Альтернативная гипотеза $H_1: m < 800$.

2—3. Выберем $\alpha = 0{,}05$. Объем выборки $n = 25$ задан.

4. Если $\bar{x}$ — выборочное среднее, то в качестве статистики выберем величину $z = \dfrac{\bar{x} - 800}{120/\sqrt{25}} = \dfrac{\bar{x} - 800}{24}$, имеющую стандартное нормальное распределение $N(0, 1)$.

5. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ вероятность гарантированной продолжительности работы лампочки $p = 1 - \alpha = 0{,}95$. По таблице нормального распределения (прил. 5) находим значение $z = -1{,}645$ (квантиль), такое, что площадь заштрихованной области равна 0,95 (рис. 19.9). Таким образом, область принятия гипотезы есть интервал $(-1{,}645;\ \infty)$.

6. а) Партия лампочек не удовлетворяет требованиям гарантии, если значение z, вычисленное по выборке, меньше чем $(-1{,}645)$;

б) В других случаях считаем, что партия удовлетворяет требованиям гарантии.

7. По выборочным данным находим

$$z = \frac{750 - 800}{24} = -2{,}83.$$

Так как $-2{,}83 < -1{,}645$, то исследуемая партия лампочек должна быть забракована. Время безотказной работы лампочек в партии значительно расхо-

дится с гарантированным временем работы (800 ч и более). Это решение будет неверным менее чем для 5 % всех случаев.

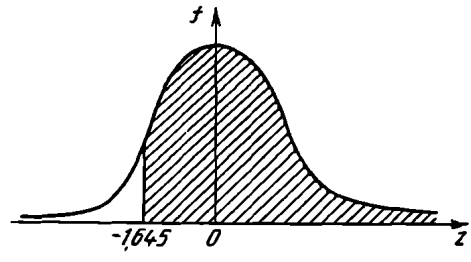


Рис. 19.9

Проверка гипотезы о равенстве математических ожиданий. Рассмотрим задачу проверки гипотезы о равенстве двух м. о. Эта задача имеет важное практическое значение, поскольку выборочное среднее одной выборки может отличаться от выборочного среднего другой выборки из одной и той же генеральной совокупности.

Пусть X и Y — две с. в. с нормальным законом распределения, а $X_1, X_2, \ldots, X_n$ и $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ — две выборки из генеральных совокупностей X и Y соответственно. Проверим нулевую гипотезу о равенстве м. о. случайных величин X и Y, т. е. гипотезу $H_0: m_x = m_y$. В этом случае альтернативная гипотеза $|m_x - m_y| > 0$ означает, что $m_x \neq m_y$.

Пусть дисперсии генеральных совокупностей X и Y равны σ_x^2 и σ_y^2 соответственно. Известно, что наилучшие оценки м. о. m_x и m_y равны выборочным средним $\overline{X}$ и $\overline{Y}$, причем с. в. $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ имеют нормальные распределения $N(m_x, \sigma_x^2/n)$ и $N(m_y, \sigma_y^2/m)$ соответственно. Так как о m_x и m_y ничего не известно, то для проверки гипотезы H_0 можно использовать оценки (статистики) $\overline{X}$ и $\overline{Y}$. Из независимости выборок следует независимость и выборочных средних $\overline{X}$ и $\overline{Y}$. Кроме того, с. в. $\overline{X} - \overline{Y}$ имеет нормальное распределение вероятностей, причем $D(X - Y) = D(\overline{X}) + D(\overline{Y}) = \sigma_x^2/n + \sigma_y^2/m$. Если гипотеза H_0 верна, то $M(\overline{X} - \overline{Y}) = M(\overline{X}) - M(\overline{Y}) = 0$. Отсюда следует, что с. в.

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\sigma_x^2/n + \sigma_y^2/n}}$$

имеет нормальное распределение $N(0, 1)$.

Пусть α — уровень значимости, тогда $p = 1 - \alpha$. По таблице нормального распределения (см. прил. 5) определяем статистику z_p, которая разделяет множество z на два непересекающихся подмножества: область допустимых значений z и критическую область для z. Значения z, для которых $|z| \leqslant z_p$, принадлежат области допустимых значений, а z, удовлетворяющие неравенству $|z| > z_p$, определяют критическую область.

Таким образом, для вероятности $p = 1 - \alpha$ критическая область определяется неравенством

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\sigma_x^2/n + \sigma_y^2/m}} > z_p.$$

Упражнение. Рассматриваются результаты сдачи вступительных экзаменов по математике в институт за ряд лет. Средний процент сдавших экзамены за этот

промежуток времени оказался равным 55 %. В 1986 г. из 100 абитуриентов экзамены по математике выдержали 62 человека. Проверить гипотезу о том, что это довольно высокий процент, взяв уровень значимости $\alpha = 0{,}01$.

19.4. ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ И КОРРЕЛЯЦИЯ

Линейная регрессия. Одной из важных задач математической статистики является нахождение зависимостей между с. в. X и Y. Часто одна из переменных, например X, является неслучайной, т. е. принимает заданные значения. В дальнейшем неслучайную переменную будем обозначать x.

Предположим, что форма функциональной зависимости между переменными x и y, называемая *моделью*, известна с точностью до параметров $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ и имеет вид

$$y = f(x, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}). \tag{19.35}$$

Функция f при этом называется *функцией регрессии* величины Y на X, а соотношение (19.35) — *уравнением регрессии* Y на X. Требуется по результатам наблюдений (выборки) (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots$, найти оценки неизвестных параметров $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$.

Задачами регрессионного анализа является:

1) установление формы зависимости. Как правило, эта форма становится известной по опытным данным (рис. 19.10), где точками отмечены значения выборок (x_i, y_i) (измерений);

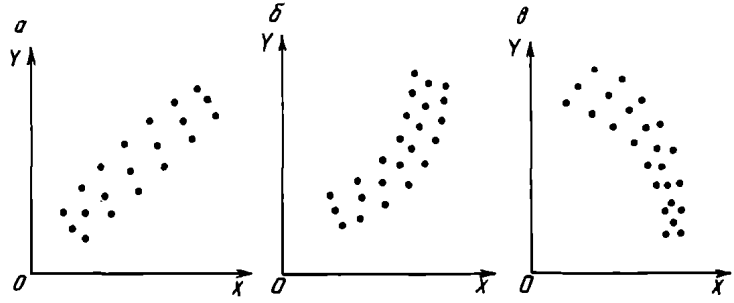


Рис. 19.10

2) определение функции регрессии (19.35). Процесс нахождения функции регрессии называется *выравниванием* отдельных значений зависимой переменной;

3) оценка неизвестных значений зависимой переменной y по оценкам параметров, входящих в уравнение регрессии.

В качестве примера функции регрессии рассмотрим линейные функции $y = \alpha + \beta x$, называемые *регрессионными прямыми* или *прямыми регрессии*.

Пусть (x_i, y_i) — наблюдаемые (точные) значения, а $\hat{y}_i = \alpha + \beta x_i$ — приближенное значение y_i, вычисленное из уравнения регрессии. Тогда величина $y_i - \hat{y}_i$ есть отклонение приближенного значения $\hat{y}_i$ от точного y_i (рис. 19.11).

По методу наименьших квадратов неизвестные параметры α и β прямой регрессии находятся из условий минимизации суммы квадратов отклонений, т. е. из условий минимизации функции:

$$S(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \alpha - \beta x_i)^2.$$

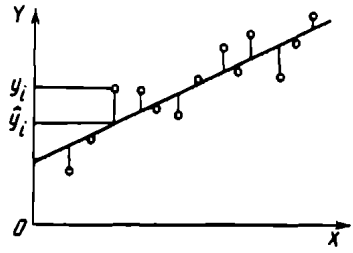


Рис. 19.11

Приравняв частные произведения S'_α и S'_β нулю, получим нормальную систему уравнений (§ 6.8, ч. II):

$$\left.\begin{aligned} \beta \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i; \\ \beta \sum_{i=1}^{n} x_i + \alpha n &= \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{aligned}\right\} \qquad (19.36)$$

Решив ее, найдем:

$$\alpha = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}; \qquad (19.37)$$

$$\beta = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.$$

Как показано в § 6.8, ч. II, значения α и β, определенные по формулам (19.37), действительно доставляют минимум функции $S(\alpha, \beta)$.

Если требуется по экспериментальным данным получить линейное уравнение регрессии X на Y, то в уравнении регрессии $y = \alpha + \beta x$ надо поменять местами переменные x и y. При этом получим уравнение $x = \alpha' + \beta' y$, где α' и β' вычисляются по формулам:

$$\alpha' = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)}{n \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}; \qquad (19.38)$$

$$\beta' = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{n \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}.$$

Отметим, что регрессионные прямые $y = \alpha + \beta x$ и $x = \alpha' + \beta' y$ различны. Первая прямая получается в результате решения задачи о минимизации суммы квадратов отклонений по вертикали, а вторая — при решении задачи о минимизации суммы квадратов отклонений по горизонтали.

На практике для нахождения уравнений регрессии составляется следующая таблица:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
x_1	y_1	x_1^2	y_1^2	$x_1 y_1$
x_2	y_2	x_2^2	y_2^2	$x_2 y_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n	x_n^2	y_n^2	$x_n y_n$
$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$	$\sum\limits_{i=1}^{n} y_i$	$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$	$\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2$	$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$

В этой таблице в последней строке суммы и определяют коэффициенты α и β или α' и β' в формулах (19.37) или (19.38) соответственно.

Пример 1. По данным таблицы наблюдений

x_i	2	4	6
y_i	5	3	7

составить уравнение регрессии Y на X и X на Y.

□ Составим таблицу:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
2	5	4	25	10
4	3	16	9	12
6	7	36	49	42
$\sum\limits_i x_i = 12$	$\sum\limits_i y_i = 15$	$\sum\limits_i x_i^2 = 56$	$\sum\limits_i y_i^2 = 83$	$\sum\limits_i x_i y_i = 64$

По формулам (19.37) при $n = 3$ получаем:

$$\alpha = \frac{56 \cdot 15 - 12 \cdot 64}{3 \cdot 56 - 12^2} = 3; \quad \beta = \frac{3 \cdot 64 - 12 \cdot 15}{3 \cdot 56 - 12^2} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, уравнение регрессии Y на X есть

$$y = \alpha + \beta x = 3 + \frac{1}{2} x.$$

Аналогично по формулам (19.38) находим:

$$\alpha' = \frac{83 \cdot 12 - 15 \cdot 64}{3 \cdot 83 - 15^2} = \frac{3}{2}; \quad \beta' = \frac{3 \cdot 64 - 15 \cdot 12}{3 \cdot 83 - 15^2} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда уравнение X на Y есть

$$x = \alpha' + \beta' y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} y.$$

Нетрудно видеть, что регрессионные прямые $y = 3 + \frac{x}{2}$ и $x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} y$ действительно различны.

Построение регрессионной прямой по сгруппированным данным. Если число измерений велико, то с целью упрощения расчетов экспериментальные данные нужно группировать, т. е. объединять в таблицу, называемую *корреляционной:*

X \ Y	y_1	y_2		y_k	m_x
x_1	m_{11}	m_{12}		m_{1k}	$\sum_{j=1}^{k} m_{1j} = m_{1x}$
x_2	m_{21}	m_{22}		m_{2k}	$\sum_{j=1}^{k} m_{2y} = m_{2x}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_s	m_{s1}	m_{s2}		m_{sk}	$\sum_{j=1}^{k} m_{sj} = m_{sx}$
m_y	$\sum_{i=1}^{s} m_{i1} = m_{1y}$	$\sum_{i=1}^{s} m_{i2} = m_{2y}$		$\sum_{i=1}^{s} m_{ik} = m_{ky}$	$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k} m_{ij} = n$

Здесь (x_i, y_j) — наблюдаемые значения, $i = 1, 2, \ldots, s$; $j = 1, 2, \ldots, k$; m_{ij} — частота появления пары (x_i, y_j); m_{ix} — частота появления x_i; m_{jy} — частота появления y_j; n — число всех наблюдений. Отсюда с учетом частот появлений переменных x_i и y_j

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{s} m_{ix} x_i; \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{j=1}^{k} m_{jy} y_j;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{s} m_{ix} x_i^2; \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{j=1}^{k} m_{jy} y_j; \quad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k} m_{ij} x_i y_j.$$

Подставив эти суммы в формулы (19.37), получим:

$$\alpha = \frac{\left(\sum_{i=1}^{s} m_{ix} x_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{k} m_{jy} y_j\right) - \left(\sum_{i=1}^{s} m_{ix} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k} m_{ij} x_i y_j\right)}{n \sum_{i=1}^{s} m_{ix} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{s} m_{ix} x_i\right)^2}; \tag{19.39}$$

$$\beta = \frac{n\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k} m_{ij}x_i y_j - \left(\sum_{i=1}^{s} m_{ix}x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{k} m_{jy}y_j\right)}{n\sum_{i=1}^{s} m_{ix}x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{s} m_{ix}x_i\right)^2}.$$

Пример 2. Найти уравнение прямой регрессии Y на X по данным корреляционной таблицы:

x \ y	30	40	50	60	70	m_x
5	2					2
10	6	5				11
15		3	7	4		14
20			40	9	4	53
25			2	6	7	15
30					5	5
m_y	8	8	49	19	16	$n = 100$

□ Для удобства вычислений построим вспомогательную таблицу (см. с. 157).

X \ Y	30	40	50	60	70	m_x	$m_{ix}x_i$	$m_{ix}x_i^2$
5	2					2	10	50
10	6	5				11	110	1100
15		3	7	4		14	210	3150
20			40	9	4	53	1060	21 200
25			2	6	7	15	375	9375
30					5	5	150	4500
m_y	8	8	49	19	16	$n = 100$	$\sum_i m_{ix}x_i = 1915$	$\sum_i m_{ix}x_i^2 = 39\,375$
$m_{jy}y_j$	240	320	2450	1140	1120	$\sum_j m_{jy}y_j = 5270$		
$m_{jy}y_j^2$	7200	12 800	122 500	68 400	78 400	$\sum_j m_{jy}y_j^2 = 289\,300$		

Для нахождения двойной суммы $\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k} m_{ij}x_iy_j$ нужно просуммировать произведения пар чисел x_iy_j на частоту m_{ij} их совместного появления: $\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{5} m_{ij}x_iy_j =$ $= 5\cdot 2\cdot 30 + 10\cdot 6\cdot 30 + 10\cdot 5\cdot 40 + 15\cdot 3\cdot 40 + 15\cdot 70\cdot 50 + 15\cdot 4\cdot 60 + 20\cdot 40 \times$ $\times 50 + 20\cdot 9\cdot 60 + 20\cdot 4\cdot 70 + 25\cdot 2\cdot 70 + 25\cdot 6\cdot 60 + 25\cdot 7\cdot 70 + 30\cdot 5\cdot 70 =$ $= 152\,650$. По формулам (19.39) находим:

$$\alpha = \frac{39\,375\cdot 5270 - 1915\cdot 152\,650}{100\cdot 39\,375 - (1915)^2} = -313{,}823;$$

$$\beta = \frac{100\cdot 152\,650 - 1915\cdot 5270}{100\cdot 39\,375 - (1915)^2} = 19{,}139.$$

Таким образом, искомое уравнение регрессии есть

$$y = -313{,}823 + 19{,}139x.$$

Линейная корреляция. Пусть имеется выборка (x_i, y_i) объема n. Напомним, что выборочная ковариация s_{xy} определяется равенством

$$s_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_iy_i - \bar{x}\cdot\bar{y} = \overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y}, \tag{19.40}$$

где $\bar{x}$, $\bar{y}$ — выборочные средние; $\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_iy_i$ — выборочное среднее произведения.

Выборочные дисперсии определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} s_x^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2; \\ s_y^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \bar{y}^2 = \overline{y^2} - \bar{y}^2. \end{aligned} \tag{19.41}$$

По определению выборочный коэффициент корреляции

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_xs_y}. \tag{19.42}$$

Рассмотрим систему (19.36). Разделив все члены ее на n, получим эквивалентную систему:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\beta + \bar{x}\alpha = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_iy_i; \\ &\bar{x}\beta + \alpha = \bar{y} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{x^2}\beta + \bar{x}\alpha = \overline{xy}; \\ \bar{x}\beta + \alpha = \bar{y}. \end{cases}$$

Отсюда по формулам Крамера

$$\alpha = \frac{\bar{y}\,\overline{x^2} - \overline{xy}\,\bar{x}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{\bar{y}\,\overline{x^2} - \overline{xy}\,\bar{x} + \overline{x^2}\,\bar{y} - \overline{x^2}\,\bar{y}}{s_x^2} =$$

$$= \frac{\bar{y}(\bar{x^2} - \bar{x}^2) - \bar{x}(\bar{xy} - \bar{x}\,\bar{y})}{s_x^2} = \frac{\bar{y}s_x^2 - \bar{x}s_{xy}}{s_x^2} =$$

$$= \bar{y} - \bar{x}\frac{s_{xy}}{s_x^2}; \quad \beta = \frac{\bar{xy} - \bar{x}\,\bar{y}}{s_x^2} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}.$$

Подставив коэффициенты α и β в уравнение регрессии $y = \alpha + \beta x$, получим

$$y = \bar{y} - \bar{x}\frac{s_{xy}}{s_x^2} + \frac{s_{xy}}{s_x^2}\,x$$

или с учетом равенства (19.42)

$$y - \bar{y} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}(x - \bar{x}) = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}\frac{s_y}{s_x}(x - \bar{x}) = r_{xy}\frac{s_y}{s_x}(x - \bar{x}).$$

Итак, уравнение прямой регрессии Y на X имеет вид

$$y - \bar{y} = r_{xy}\frac{s_y}{s_x}(x - \bar{x}). \tag{19.43}$$

Аналогично найдем, что уравнение прямой регрессии X на Y запишется в виде

$$x - \bar{x} = r_{xy}\frac{s_x}{s_y}(y - \bar{y}). \tag{19.44}$$

Из уравнений (19.43) и (19.44) следует, что прямые регрессии Y на X и X на Y проходят через точку $(\bar{x}, \bar{y})$. Эти прямые совпадают, когда $|r_{xy}|^2 = 1$.

Величины $r_{xy}\frac{s_y}{s_x}$ и $r_{xy}\frac{s_x}{s_y}$ называются *коэффициентами линейной регрессии* и обозначаются:

$$r_{y|x} = r_{xy}\frac{s_y}{s_x}; \quad r_{x|y} = r_{xy}\frac{s_x}{s_y}. \tag{19.45}$$

Перемножив правые и левые части равенств (19.45), после извлечения корня получим $r_{xy} = \pm\sqrt{r_{y|x}r_{x|y}}$, т. е. коэффициент корреляции есть среднее геометрическое коэффициентов линейной регрессии.

Упражнение. По данным таблицы

X	2	5	8	10	14	15	4	12	3	7	6
Y	14,39	9,45	7,05	5,32	16,94	1,97	8,75	3,41	13,37	8,22	9,39

найти уравнение прямой регрессии Y на X.

20. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

20.1. КОНЕЧНЫЕ МАРКОВСКИЕ ЦЕПИ

Понятие случайного процесса. Длительное время все практические задачи, возникающие при исследовании случайных явлений, полностью укладывались в схему случайных величин. В 1827 г. Р. Броун* открыл явление, заключающееся в том, что легкие частицы, взвешенные в жидкости, совершают беспорядочное движение, названное впоследствии броуновским. Для исследования процессов, аналогичных броуновскому движению, потребовался математический аппарат, дающий возможность количественного анализа не случайных величин, а случайных функций или случайных процессов. Число задач, требующих для своего решения привлечения аппарата теории случайных функций, особенно возросло в связи с развитием систем автоматического управления и регулирования. Теория случайных функций в настоящее время является одним из наиболее быстро развивающихся разделов теории вероятностей.

Подобно тому как понятие с. в. является обобщением понятия случайного события, понятие случайной функции (случайного процесса) является обобщением понятия с. в., поскольку значение случайной функции при определенном значении ее аргумента является с. в.

Случайная функция (случайный процесс) определяется как семейство случайных величин $X(t)$, $t \in T$, которые зависят от параметра или индекса t, принадлежащего соответствующему множеству T. Параметр t часто интерпретируется как время. Одним из простейших случайных процессов является так называемый конечный марковский процесс (конечная марковская цепь).

Переходная матрица и ее свойства. Для ознакомления с основными понятиями марковских цепей рассмотрим следующий пример.

Пример 1. Фишка находится на средней клетке в ряду из пяти клеток A, B, C, D, E, считая слева направо, и перемещается на соседнюю клетку по правилу: если она не на крайней клетке, то перемещается вправо, когда выпадет герб (Г) при подбрасывании монеты, и влево, когда выпадет решетка (Р); если фишка на крайней клетке, то остается на ней независимо от выпадения Г или Р.

При первом подбрасывании монеты в зависимости от выпадения Г или Р фишка переместится на одну клетку вправо или влево соответственно. При следующем подбрасывании монеты новое положение фишки будет зависеть только от предыдущего ее местоположения (состояния), т. е. фишка может оказаться либо с краю, либо опять в центре.

Итак, всякое новое положение фишки при очередном подбрасывании монеты полностью зависит от ее предыдущего состояния (местоположения).

---

* Р. Броун (1773—1858) — английский ботаник.

Последовательность испытаний в некотором эксперименте называется *марковским* процессом* или *марковской цепью,* если исход любого k-го испытания зависит только от исхода $(k-1)$-го испытания и не зависит от исходов предыдущих испытаний. Приведенный пример и является примером марковского процесса.

Множество всех возможных состояний, которые может принимать процесс, называется *пространством состояний.* В примере 1 состояниями являются положения A, B, C, D, E фишки. Марковская цепь характеризуется вероятностями того, что при последующих испытаниях рассматриваемая система переходит из одного состояния в другое. *Переходной матрицей* марковской цепи называется $n \times n$-матрица $P=[p_{ij}]$, где p_{ij} — вероятность того, что при отдельном испытании (за один шаг) система переходит из состояния ω_i в состояние ω_j.

Пример 2. Построим матрицу перехода марковской цепи (см. пример 1). Здесь имеется 5 состояний: A, B, C, D, E. По условию задачи переход из состояний B, C, D в любое соседнее состояние A, B, C, D, E осуществляется с вероятностью 0,5. Если же фишка находится в крайних клетках A или E, то вероятность перехода из A в B и из E в D равна нулю в силу условий, а вероятность перехода из A в A и из E в E — единице. В результате искомая матрица перехода имеет вид

$$P=\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Пример 3. В любой данный день погода может быть хорошей (Х), посредственной (П) и плохой (Пл). Предположим, что если сегодня погода хорошая, то завтра она будет хорошей с вероятностью 0,6, посредственной с вероятностью 0,3 и плохой с вероятностью 0,1. Если сегодня погода посредственная, то завтра она будет хорошей, посредственной или плохой с вероятностями 0,2; 0,5 и 0,3 соответственно. Если, наконец, сегодня плохая погода, то завтра она будет хорошей, посредственной или плохой с вероятностями 0,2; 0,3 и 0,5 соответственно. Этот процесс можно описать в виде марковской цепи с тремя исходами ω_1, ω_2 и ω_3, соответствующими хорошей, посредственной и плохой погоде в любой данный день. Переходная матрица этой марковской цепи имеет вид

$$P=\begin{array}{c} \\ \text{Х} \\ \text{П} \\ \text{Пл} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Х} & \text{П} & \text{Пл} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (20.1)$$

Элементы строки матрицы перехода P определяют вероятности того, что рассматриваемая система находится в определенном состоянии. Так как строка переходной матрицы учитывает все возможные состояния системы, определяя, таким образом, вероятности полной группы событий, то сумма вероятностей, записанных в строке, равна единице. Матрица такого вида называется *стохастической.* Каждая ее строка представляет собой n-мерный вектор $\mathbf{p}=(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, где $p_i > 0$; $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. Такой вектор называется *стохастическим.*

* А. А. Марков (1856—1922) — русский математик.

Стохастические векторы и матрицы обладают рядом важных свойств.

1°. Если $\mathbf{p}$ — n-мерный стохастический вектор, а $P=[p_{ij}]$-стохастическая матрица, то $\mathbf{p}P$ является n-мерным стохастическим вектором.

□ Имеем

$$\mathbf{p}P=(p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n)\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn} \end{bmatrix}=$$

$$=(p_1p_{11}+p_2p_{21}+\ldots+p_np_{n1},\ \ldots,\ p_1p_{1n}+p_2p_{2n}+\ldots+p_np_{nn}).$$

В силу неотрицательности p_i и p_{ij} i-я координата вектора $\mathbf{p}P$ $p_1p_{1i}+p_2p_{2i}+\ldots+p_np_{ni}\geqslant 0$. Покажем, что сумма координат вектора $\mathbf{p}P$ равна единице. Действительно, так как $\sum\limits_{i=1}^{n}p_{1i}=\sum\limits_{i=1}^{n}p_{2i}=\ldots=\sum\limits_{i=1}^{n}p_{ni}=1$, согласно стохастичности матрицы P, то

$$\sum_{i=1}^{n}(p_1p_{1i}+p_2p_{2i}+\ldots+p_np_{ni})=p_1\sum_{i=1}^{n}p_{1i}+p_2\sum_{i=1}^{n}p_{2i}+\ldots+p_n\sum_{i=1}^{n}p_{ni}=$$

$$=p_1+p_2+\ldots+p_n=1.\ \blacksquare$$

2°. Если P и Q $n\times n$-стохастические матрицы, то произведение PQ есть $n\times n$-стохастическая матрица.

□ Произведение матриц PQ есть матрица, i-я строка которой есть произведение i-го вектора-строки матрицы P и матрицы Q, $i=1,\ 2,\ \ldots$ По свойству 1° эта строка — стохастический вектор, т. е. матрица PQ — стохастическая.

Пример 4. Для стохастических матриц

$$P=\begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}\text{ и }Q=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 5/12 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

произведение

$$PQ=\begin{bmatrix} 5/16 & 1/12 & 29/48 \\ 1/4 & 1/3 & 5/12 \\ 5/12 & 1/9 & 17/36 \end{bmatrix}$$

есть стохастическая матрица.

3°. Если P — стохастическая матрица, то матрицы P^2, P^3, ..., P^m также являются стохастическими.

Это свойство является следствием свойства 2° при $Q=P$.

4°. Если P — $n\times n$-стохастическая матрица, то существует ненулевой n-вектор-строка $\mathbf{t}$, такой, что $\mathbf{t}P=\mathbf{t}$.

□ Ненулевой вектор $\mathbf{t}$, удовлетворяющий равенству $\mathbf{t}=\mathbf{t}P$, существует тогда и только тогда, когда определитель $|P-E|=0$, где E — единичная $n\times n$-матрица. Но равенство $|P-E|=0$ возможно тогда и только тогда, когда столбцы матрицы $P-E$ линейно зависимы. Так как для стохастических матриц сумма элементов каждой строки равна единице, то имеет место равенство

$$\begin{pmatrix} p_{11}-1 \\ p_{21} \\ \dots \\ p_{n1} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22}-1 \\ \dots \\ p_{n2} \end{pmatrix}+\dots+\begin{pmatrix} p_{1n} \\ p_{2n} \\ \dots \\ p_{nn}-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

показывающее, что векторы-столбцы матрицы $P-E$ линейно зависимы. ■.

Вектор $\mathbf{t}$, удовлетворяющий соотношениям $\mathbf{t}=\mathbf{t}P$, называется *неподвижным вектором* для матрицы P. Если вектор $\mathbf{t}$ и матрица P — стохастические, причем $\mathbf{t}=\mathbf{t}P$, то $\mathbf{t}$ называется *неподвижным стохастическим вектором матрицы* P.

Вероятности многошаговых переходов. Пусть $P=[p_{ij}]$ — переходная матрица. Здесь p_{ij} — условная вероятность того, что из состояния ω_i, в котором система оказалась в результате некоторого испытания, она перейдет при следующем испытании в состояние ω_j. Эта условная вероятность называется *одношаговой вероятностью перехода* из состояния ω_i в состояние ω_j. Двухшаговая вероятность $p_{ij}^{(2)}$ определяется как вероятность того, что система, находясь в состоянии ω_i, переходит в состояние ω_j в результате двух испытаний. Переходя из состояния ω_i в состояние ω_j за два шага, система может пройти через некоторое промежуточное состояние ω_k, $k=1, 2, \dots$ Вероятность такого перехода есть $p_{ik}p_{kj}$, поскольку последовательные испытания независимы. По формуле полной вероятности получаем, что двухшаговая вероятность перехода

$$p_{ij}^2=p_{i1}p_{1j}+p_{i2}p_{2j}+\dots+p_{in}p_{nj}=\sum_{k=1}^{n}p_{ik}p_{kj}.$$

Это выражение представляет собой ij-й элемент матрицы P^2. Матрица P^2 называется *двухшаговой переходной матрицей марковской цепи.*

Итак, *двухшаговая переходная матрица марковской цепи равна* P^2, где P — одношаговая переходная матрица этой марковской цепи.

Аналогично m-шаговая переходная матрица P^m определяется как m-я степень одношаговой переходной матрицы P.

Пример 5. Для одношаговой матрицы перехода (20.1) найти матрицу перехода из состояния ω_i в состояние ω_j за два шага.

□ Искомой является матрица P^2:

$$P^2=\begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0{,}44 & 0{,}36 & 0{,}20 \\ 0{,}28 & 0{,}40 & 0{,}32 \\ 0{,}28 & 0{,}36 & 0{,}36 \end{bmatrix}.$$

Полученный результат говорит, в частности, о том, что если погода сегодня хорошая, то вероятность хорошей погоды двумя днями позже есть $p_{11}^{(2)}=0{,}44$, а вероятность того, что если сегодня посредственная погода, то послезавтра она будет плохой, равна 0,32.

Предельная вероятность для марковских цепей. Первое состояние, из которого начинается марковский процесс, может быть либо известно, либо определяться по некоторому вероятностному правилу. Для любого процесса должен быть задан начальный вектор вероятностей.

Начальным распределением вероятностей марковской цепи называется n-мерный вектор-строка $\mathbf{p}^{(0)}=(p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)})$, где $p_i^{(0)}$ — вероятность того, что система первоначально находилась в состояния ω_i, $i=1, 2, \ldots, n$. В примере 1 начальный вектор $\mathbf{p}^{(0)}=(0, 0, 1, 0, 0)$, так как известно, что процесс начинается с того, что фишка находится в клетке C.

Пример 6. Если система первоначально находится в состоянии ω_1, начальное распределение вероятностей есть $\mathbf{p}^{(0)}=(1, 0, \ldots, 0)$. Если же система с одинаковой вероятностью может находиться в любом из n начальных состояний $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, начальное распределение вероятностей есть $\mathbf{p}^{(0)}=(1/n, 1/n, \ldots, 1/n)$.

Вектор-строка $\mathbf{p}^{(m)}=(p_1^{(m)}, p_2^{(m)}, \ldots, p_n^{(m)})$ называется *m-шаговым распределением вероятностей марковской цепи,* если $p_i^{(m)}$ представляет собой вероятность того, что при m-м испытании система оказывается в состоянии ω_i, $i=1, 2, \ldots, n$.

Справедлива

Теорема 20.1. Если $\mathbf{p}^{(0)}$ — начальное распределение вероятностей марковской цепи с матрицей перехода P, то распределение вероятностей после одного испытания $\mathbf{p}^{(1)}=\mathbf{p}^{(0)}P$. В общем случае m-шаговое распределение вероятностей $\mathbf{p}^{(m)}=\mathbf{p}^{(0)}P^m$.

Доказательство теоремы опускаем.

Пример 7. Рассмотрим марковскую цепь из примера 3. Пусть начальное распределение вероятностей $\mathbf{p}^{(0)}=(1, 0, 0)$, т. е. сегодня хорошая погода. Найти распределение вероятностей на завтра и послезавтра.

□ Имеем

$$\mathbf{p}^{(1)}=\mathbf{p}^{(0)}p^{(1)}=(1;\ 0;\ 0)\begin{bmatrix}0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1\\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3\\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5\end{bmatrix}=(0{,}6;\ 0{,}3;\ 0{,}1).$$

Значит, вероятность, что завтра будет хорошая погода составляет 0,6, посредственная — 0,3, плохая — 0,1.

На послезавтра распределение вероятностей будет следующим:

$$\mathbf{p}^{(2)}=\mathbf{p}^{(0)}p^{(2)}=(1;\ 0;\ 0)\begin{bmatrix}0{,}44 & 0{,}36 & 0{,}20\\ 0{,}28 & 0{,}40 & 0{,}32\\ 0{,}28 & 0{,}36 & 0{,}36\end{bmatrix}=(0{,}44;\ 0{,}36;\ 0{,}20),$$

т. е. вероятность хорошей погоды — 0,44, посредственной — 0,36, плохой — 0,2.

Марковская цепь называется *регулярной,* если все элементы некоторой степени P^m ее матрицы перехода P строго положительны.

Пример 8. Марковская цепь с матрицей перехода

$$P=\begin{bmatrix}0 & 0{,}5 & 0{,}5\\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5\\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0\end{bmatrix}$$

является регулярной, так как матрица

$$P^2=\begin{bmatrix}0 & 0{,}5 & 0{,}5\\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5\\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0{,}5 & 0{,}5\\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5\\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}25\\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25\\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}5\end{bmatrix}$$

не содержит нулевых элементов.

Для регулярных марковских цепей справедлива теорема о предельных вероятностях.

Теорема 20.2. Пусть марковская цепь регулярна. Тогда: 1) матрица перехода P имеет единственный неподвижный стохастический вектор $\mathbf{t}$, все координаты которого строго положительны; 2) существует предельная матрица $T = \lim\limits_{m\to\infty} P^m$, каждая строка которой совпадает с неподвижным стохастическим вектором $\mathbf{t}$; 3) если $\mathbf{p}$ — любой стохастический вектор, то $\lim\limits_{m\to\infty} \mathbf{p}P^m = \mathbf{t}$.

Пример 9. Найти неподвижный стохастический вектор марковской цепи с матрицей перехода

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

□ Так как двухшаговая матрица

$$P^2 = \begin{bmatrix} 7/24 & 1/8 & 7/12 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 5/24 & 1/4 & 13/24 \end{bmatrix}$$

имеет ненулевые элементы, то марковская цепь регулярна. Пусть вектор $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$, $t_1 + t_2 + t_3 = 1$. Числа t_1, t_2, t_3 найдем из равенства $\mathbf{t}P = \mathbf{t}$:

$$(t_1, t_2, t_3) \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} = (t_1, t_2, t_3).$$

Отсюда получаем систему

$$\left.\begin{array}{rrrl} & \frac{1}{3}t_2 + \frac{1}{4}t_3 = t_1; \\ \frac{1}{2}t_1 & + \frac{1}{4}t_3 = t_2; \\ \frac{1}{2}t_1 + \frac{2}{3}t_2 + \frac{1}{2}t_3 = t_3; \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} t_1 = \frac{8}{37}; \\ t_2 = \frac{9}{37}; \\ t_3 = \frac{20}{37}. \end{array}\right.$$

Таким образом, неподвижным вектором для рассматриваемой марковской цепи является $\mathbf{t} = (8/37, 9,37, 20/37)$.

Задачи и упражнения

1. В любой данный день человек здоров или болен. Если человек здоров сегодня, то вероятность того, что он будет здоров и завтра, равна 0,98. Если человек сегодня болен, то завтра он будет здоров лишь с вероятностью 0,30. Найти переходную матрицу данного марковского процесса.

2. Являются ли матрицы:

$$\text{а)} \begin{bmatrix} 0{,}99 & 0{,}02 & 0{,}01 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}98 & 0{,}01 & 0{,}01 \end{bmatrix}; \qquad \text{б)} \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}125 & 0{,}125 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}125 & 0{,}125 \end{bmatrix}$$

стохастическими?

3. Вычислить двухшаговую переходную матрицу для одношаговой матрицы

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Указать значения $p_{11}^{(2)}$, $p_{12}^{(2)}$ и $p_{13}^{(2)}$.

4. Найти неподвижный стохастический вектор для переходных матриц:

а) $P=\begin{bmatrix} 2/3 & 1/6 & 7/6 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; б) $P=\begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$.

Является ли он единственным?

20.2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Случайный процесс и его описание. Пусть Ω — пространство элементарных событий с исходами ω и пусть для каждого элементарного события ω определяется случайная функция времени $X(t, \omega)$. Такая совокупность функций называется *случайным процессом*. Итак, случайный процесс — это функция, значения которой при каждом фиксированном t есть с. в. В дальнейшем для упрощения записи случайного процесса вместо $X(t, \omega)$ часто будем писать $X(t)$, где t принадлежит некоторому множеству T. Если T — счетное множество, то $X(t)$, $t \in T$, называется *случайным процессом с дискретным временем* или *случайной последовательностью (цепью)*. Если T — отрезок времени, конечный или бесконечный, то $X(t)$, $t \in T$, называется *случайным процессом с непрерывным временем*.

Реализацией или *траекторией случайного процесса* $X(t, \omega)$ называется функция времени t при выбранном эксперименте $\omega \in \Omega$. Для фиксированного $t = t_0$ функция $X(t_0, \omega)$ есть случайная величина, которая называется *сечением случайного процесса* в момент времени t_0.

Пространством состояний S случайного процесса называется множество всевозможных значений $X(t, \omega)$, $\forall t \in T$, $\omega \in \Omega$. Если процесс имеет счетное множество состояний, то он иногда называется цепью. На рис. 20.1 кружочками обозначены состояния случайного процесса в момент времени t. Возможные траектории этого случайного процесса изображены в виде кривых линий a, b, c, d.

Пример 1. Рассмотрим процесс бросания игральной кости. Пусть X_n — число выпавших очков при n-м бросании. Тогда возможные значения (состояния) случайной величины X_n при каждом n образуют множество $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, а одной из реализаций процесса может быть, например, последовательность чисел $\{5, 1, 4, 2, 6, 3, 1, 4, 5, 1, 4, \ldots\}$.

Пример 2. Рассмотрим случайный процесс

$$X(t) = \omega \sin t, \quad t \geqslant 0, \qquad (20.2)$$

где ω — непрерывная с. в., равномерно распределенная на отрезке $[-1, 1]$ с плотностью вероятностей

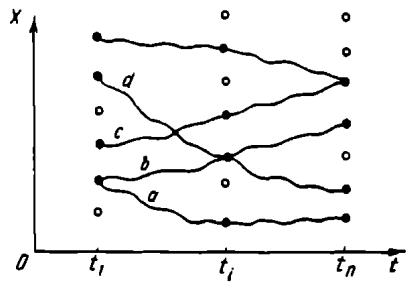


Рис. 20.1

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5 & x \in [-1, 1]; \\ 0, & x < -1, \ x > 1. \end{cases}$$

В данном случае для любого $t \geqslant 0$ $X(t)$ — с. в. При фиксированном ω траекторией процесса $X(t)$ является синусоида с амплитудой ω.

Законы распределения случайных процессов. *Одномерной функцией распределения* случайного процесса $X(t)$ при фиксированном $t = t_1$ называется функция

$$F(x_1,\ t_1) = P(X(t_1) < x_1),\ \forall\, x_1 \in \mathbf{R}. \tag{20.3}$$

Эта функция задает вероятность множества траекторий, которые при фиксированном $t = t_1$ проходят ниже точки $(t_1,\ x_1)$ (рис. 20.2), т. е. не попадают на «барьер», показанный на рисунке вертикальным лучом.

При $x \leqslant y$ из определения (20.3) одномерной функции распределения следует, что равенство $F(t, y) - F(t, x) = P(x \leqslant X(t) \leqslant y)$ задает вероятность множества траекторий, проходящих через «ворота» между точками $(t,\ x)$ и $(t,\ y)$ (рис. 20.3).

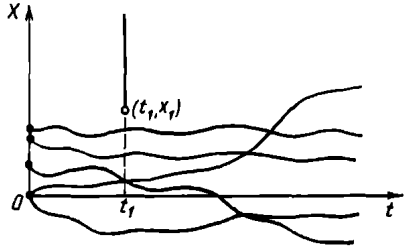


Рис. 20.2

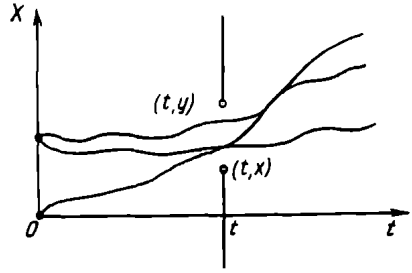


Рис. 20.3

Двумерной функцией распределения случайного процесса $X(t)$ при фиксированных t_1 и t_2 называется функция

$$F(x_1,\ x_2;\ t_1,\ t_2) = P(X(t_1) < x_1,\ X(t_2) < x_2),\ \forall\, x_1,\ x_2 \in \mathbf{R}.$$

Эта функция задает вероятность множества траекторий, которые одновременно проходят ниже точек $(t_1,\ x_1)$ и $(t_2,\ x_2)$ (рис. 20.4).

Аналогично *n-мерная функция распределения* случайного процесса $X(t)$ при фиксированных $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n$ определяется равенством

$$F(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n) = P(X(t_1) < x_1,\ X(t_2) < x_2,\ \ldots,\ X(t_n) < x_n) \tag{20.4}$$

для всех $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ из $\mathbf{R}$.

Если функция (20.4) достаточное число раз дифференцируема, то *n-мерная совместная плотность вероятностей* случайного процесса $X(t)$ имеет вид

$$f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n) = \frac{\partial^n F(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n}. \tag{20.5}$$

Функция распределения (20.4) или плотность вероятностей (20.5) тем полнее описывает сам случайный процесс, чем больше n. Эти функции учитывают связь хотя и между любыми, но лишь фиксированными сечениями этого процесса. Случайный процесс считается заданным, если задано множество всех его n-мерных законов рас-

пределения или n-мерных плотностей вероятностей для любых n. При этом функция распределения должна удовлетворять *условиям симметрии и согласованности Колмогорова**. Условие симметрии состоит в том, что F — симметричная функция для всех пар (x_i, t_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, в том смысле, что, например,

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) = F(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n; t_2, t_1, \ldots, t_n).$$

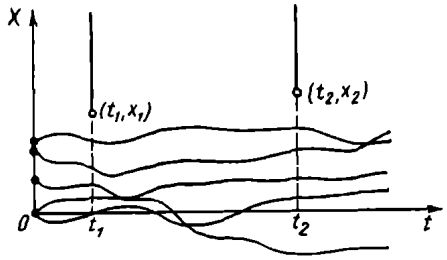


Рис. 20.4

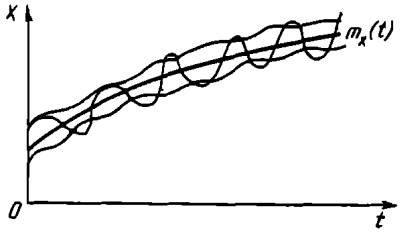


Рис. 20.5

Условие же согласованности означает, что

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) = \lim_{x_n \to \infty} F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n),$$

т. е. n-мерный закон распределения случайного процесса $X(t)$ определяет все законы распределения более низкой размерности.

Числовые характеристики случайных процессов. *Математическим ожиданием* или *средним значением случайного процесса* $X(t)$ называется функция

$$M(X(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, t)dx = m_x(t), \qquad (20.6)$$

где $f(x, t)$ — одномерная плотность вероятностей случайного процесса. Геометрически м. о. соответствует некоторая кривая, около которой группируются траектории случайного процесса (рис. 20.5).

Дисперсией случайного процесса $X(t)$ называется функция

$$D(X(t)) = M(X(t) - m_x(t))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x(t))^2 f(x, t)dx = D_x(t). \qquad (20.7)$$

Таким образом, м. о. и дисперсия случайного процесса $X(t)$ зависят от одномерной плотности вероятностей и являются неслучайными функциями времени t. Дисперсия случайного процесса характеризует степень разброса траекторий относительно его среднего значения $m_x(t)$. Чем больше дисперсия, тем значительнее разброс траекторий. Если дисперсия равна нулю, то все траектории случайного процесса $X(t)$ совпадают с м. о. $m_x(t)$, а сам случайный процесс превращается в обычную функцию действительной переменной t.

Корреляционная функция $K_X(t_1, t_2)$ случайного процесса $X(t)$ определяется равенством

* А. Н. Колмогоров (1903—1987) — советский математик.

$$K_X(t_1,\ t_2)=\operatorname{cov}(X(t_1),\ X(t_2))=$$
$$=M((X(t_1)-m_x(t_1))(X(t_2)-m_x(t_2)))=$$
$$=M(X(t_1)X(t_2))-m_x(t_1)m_x(t_2)=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-m_x(t_1))(x_2-m_x(t_2))f(x_1,\ x_2;\ t_1,\ t_2)dx_1dx_2, \quad (20.8)$$

где $f(x_1, x_2; t_1, t_2)$ — двумерная плотность вероятностей случайного процесса.

Корреляционная функция $K_X(t_1, t_2)$ характеризует степень связи между ординатами случайного процесса $X(t)$ для двух моментов времени t_1 и t_2. При этом чем больше корреляционная функция, тем более плавными являются траектории случайного процесса $X(t)$, и наоборот. На рис. 20.6, *а* изображены траектории случайного процесса с разными м. о., на рис. 20.6, *б* — с разными дисперсиями, а на рис. 20.6, *в* — с разными корреляционными функциями.

Пример 3. Найти м. о. и корреляционную функцию случайного процесса, рассмотренного в примере 2.

□ По формулам (20.6) и (20.8)

$$m_x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,\ t)dx=\int_{-1}^{1}0{,}5xdx=0;$$

$$K_X(t_1,\ t_2)=M(X(t_1)X(t_2))-m_x(t_1)m_x(t_2)=$$
$$=M(X(t_1)X(t_2))=M(\omega\sin t_1\cdot\omega\sin t_2)=$$
$$=\sin t_1\sin t_2\cdot M(\omega^2)=$$
$$\sin t_1\sin t_2\int_{-1}^{1}0{,}5x^2dx=$$
$$=\frac{1}{3}\sin t_1\sin t_2.$$

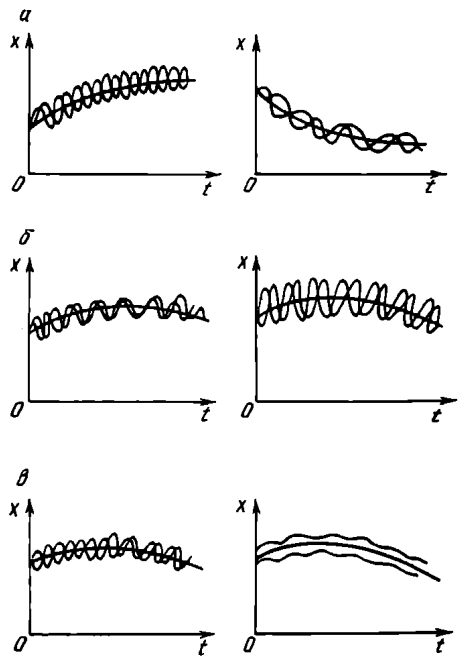


Рис. 20.6

Корреляционная функция обладает приведенными ниже свойствами.

1°. Симметричность: $K_X(t_1, t_2)=K_X(t_2, t_1)$.

2°. $K_X(t, t)\geqslant 0,\ \forall t$.

Эти свойства следуют из соответствующих свойств ковариации с. в.

Теория, изучающая случайные процессы на основе знания м. о. и корреляционной функции, называется *корреляционной теорией*. С помощью методов корреляционной теории исследуются в основном линейные системы автоматического регулирования и управления.

Стационарные случайные процессы. Случайный процесс $X(t)$, $t\in T$, называется *стационарным* в узком смысле, если совместное распределение с. в.

$$\{X(t_1+h),\ X(t_2+h),\ \ldots,\ X(t_n+h)\}\ \text{и}\ \{X(t_1),\ X(t_2),\ \ldots,\ X(t_n)\},\ t_i+h\in T,$$

одинаково и не зависит от h, т. е.

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1+h, t_2+h, \ldots, t_n+h) = \\ = F(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n).$$

Отсюда для плотности вероятностей f имеет место соотношение

$$f(x_1, \ldots, x_n; t_1+h, \ldots, t_n+h) = f(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n).$$

Для стационарного случайного процесса $X(t)$, согласно равенству $f(x, t+h) = f(x, t)$ при $h = -t$, имеем $f(x, t) = f(x, 0) = f(x)$, где $f(x, t)$ — одномерная плотность вероятностей. Отсюда

$$m_x(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x, t)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = m_x.$$

Аналогично для двумерной плотности вероятностей из равенства $f(x_1, x_2; t_1+h; t_2+h) = f(x_1, x_2; t_1, t_2)$ при $h = -t_1$ получим $f(x_1, x_2; t_1, t_2) = f(x_1, x_2; 0, t_2-t_1) = f(x_1, x_2; t_2-t_1)$. Отсюда для корреляционной функции (20.8) будем иметь

$$K_X(t_1, t_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (X(t_1)-m_x)(X(t_2)-m_x)f(x_1, x_2; t_2-t_1) \times \\ \times dx_1 dx_2 = K_X(t_2-t_1) = K_X(t),$$

где $t = t_2 - t_1$.

Таким образом, для процессов, стационарных в узком смысле, м. о. является постоянной величиной, а корреляционная функция зависит только от разности аргументов, т. е. $K_X(t_1, t_2) = K_X(t_2-t_1) = K_X(t_1-t_2)$, так как корреляционная функция симметрична.

Случайный процесс с постоянным м. о. и корреляционной функцией, зависящей только от разности аргументов, называется *случайным процессом, стационарным в широком смысле*. Ясно, что стационарный в узком смысле случайный процесс является стационарным и в широком смысле. Обратное же в общем случае неверно.

Пример 3. Пусть $X(t)$, $t \geqslant 0$, — случайный процесс, описываемый дифференциальным уравнением $\dot{x} + ax = \omega$, где a — положительная постоянная, а ω — с. в. с нулевым м. о. и постоянной дисперсией σ^2, не зависящая от начального условия $x(0)$. Положим для простоты $x(0) = 0$. Найдем характеристики случайного процесса $X(t)$.

□ Решив данную задачу Коши, получим траекторию случайного процесса $x(t) = \frac{\omega}{a}(1-e^{-at})$, $t \geqslant 0$. Так как $M(\omega) = 0$ по условию, находим

$$m_x(t) = M\left(\frac{\omega}{a}(1-e^{-at})\right) = \frac{1}{a}(1-e^{-at})M(\omega) = 0.$$

Далее,

$$D_x(t) = M(X^2(t)) - m_x^2(t) = \frac{(1-e^{-at})^2}{a^2}M(\omega^2) = \frac{\sigma^2}{a^2}(1-e^{-at})^2;$$

$$K_X(t_1, t_2) = M(X(t_1)X(t_2)) = M\left(\frac{\omega^2}{a^2}(1-e^{-at_1})(1-e^{-at_2})\right) =$$

$$= \frac{\sigma^2(1-e^{-at_1})(1-e^{-at_2})}{a^2} \neq K_X(t_1-t_2),$$

т. е. рассматриваемый процесс не является стационарным в широком (тем более в узком) смысле. Заметим, что при t_1 и t_2, стремящихся к бесконечности, корреляционная функция $K_X(t_1, t_2)$ стремится к σ^2/a^2.

Таким образом, в пределе при $t \to \infty$ процесс становится стационарным в широком смысле.

Корреляционная функция стационарного случайного процесса обладает приведенными ниже свойствами.

1°. $K_X(t) = K_X(-t)$, т. е. функция $K_X(t)$ — четная.

Для доказательства достаточно положить $t_2 - t_1 = t$ и воспользоваться свойством симметричности корреляционной функции.

2°. Имеет место неравенство $K_X(t) \leqslant K_X(0)$.

В самом деле, из неравенства Коши — Буняковского (18.136) имеем

$$K_X^2(t_2-t_1) \leqslant K_X(t_1-t_1)K_X(t_2-t_2) = K_X^2(0).$$

3°. Для дисперсии стационарного случайного процесса $X(t)$ справедливо соотношение $D(X(t)) = K_X(0) = \text{const}$.

Действительно, $D(X(t)) = K_X(t-t) = K_X(0)$.

Понятие спектральной плотности стационарного случайного процесса. Пусть $X(t)$, $t \in T$,— стационарный случайный процесс, непрерывный по времени t, с м. о. m_x и корреляционной функцией $K_X(t)$. Для этого процесса *спектральная плотность* определяется равенством

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_X(t)e^{-i\omega t}dt \qquad (20.8')$$

Если известна спектральная плотность $S_X(\omega)$, то в результате обратного преобразования Фурье можно найти корреляционную функцию

$$K_X(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega)e^{i\omega t}d\omega. \qquad (20.9)$$

Для процессов с дискретным временем $t = n$, $n \in \mathbf{Z}$, спектральная плотность определяется дискретным преобразованием Фурье:

$$S_X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_X(n)e^{-in\omega}. \qquad (20.10)$$

Тогда корреляционную функцию $K_X(n)$ можно найти как обратное дискретное преобразование Фурье по формуле

$$K_X(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_X(\omega)e^{i\omega n}d\omega. \qquad (20.11)$$

Для существования преобразования Фурье (20.8') и (20.10) до-

статочно существования интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} |K_X(t)|dt$ и суммы $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |K_X(n)|$ соответственно, т. е. абсолютной интегрируемости на $(-\infty, \infty)$ корреляционной функции $K_X(t)$ и абсолютной суммируемости последовательности $\{K_X(n)\}$.

Покажем, что спектральная плотность $S_X(\omega)$ стационарного случайного процесса является четной функцией, т. е. $S_X(-\omega) = S_X(\omega)$. Действительно, в силу четности корреляционной функции $K_X(t)$

$$S_X(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_X(t)e^{i\omega t}dt = |t = -\tau| = \int_{-\infty}^{\infty} K_X(-\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau = S_X(\omega).$$

Так как $S_X(\omega)$ — четная функция, формулы (20.8) и (20.9) можно переписать в виде:

$$S_X(\omega) = 2\int_0^{\infty} K_X(t)\cos\omega t dt; \tag{20.12}$$

$$K_X(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} S_X(\omega)\cos\omega t d\omega. \tag{20.13}$$

Из формулы (20.13) и определения корреляционной функции $K_X(t)$ следует, что дисперсия стационарного случайного процесса $X(t)$

$$D(X(t)) = K_X(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} S_X(\omega)d\omega. \tag{20.14}$$

Если случайный процесс есть флуктуация электрического тока или напряжения, то дисперсия случайного процесса как среднее значение квадрата тока или напряжения пропорциональна средней мощности этого процесса. Поэтому из равенства (20.14) следует, что спектральная плотность $S_X(\omega)$ в этом случае характеризует плотность мощности, приходящуюся на единицу частоты ω.

На практике вместо спектральной плотности $S_X(\omega)$, определяемой формулой (20.12), часто пользуются *нормированной спектральной плотностью*:

$$S_X(\omega) = \frac{S_X(\omega)}{D(X(t))} = \frac{S_X(\omega)}{K_X(0)}. \tag{20.15}$$

Тогда так называемая *нормированная корреляционная функция* $k_X(t)$ может быть найдена с помощью обратного преобразования Фурье:

$$k_X(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} s_X(\omega)\cos\omega t d\omega. \tag{20.16}$$

Пример 4. Нормированная корреляционная функция $k_X(t)$ случайного процесса $X(t)$ имеет вид

$$k_X(t)=\begin{cases}1-t/t_0, & 0<t<t_0;\\ 0, & t>t_0.\end{cases}$$

Ее график приведен на рис. 20.7. Найти нормированную спектральную плотность этого случайного процесса.

□ По формуле (20.16)

$$s_X(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}k_X(t)\cos\omega t dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{t_0}\left(1-\frac{t}{t_0}\right)\cos\omega t dt=$$

$$=\frac{2}{\pi t_0\omega^2}(1-\cos\omega t_0)=\frac{4}{\pi t_0}\,\frac{\sin^2(\omega t_0/2)}{\omega^2}.$$

График функции $s_X(\omega)$ изображен на рис. 20.8.

Заметим, что полная площадь, ограниченная кривой $\frac{s_X(\omega)}{2\pi}$ и осью ω (на рис. 20.8 она заштрихована), равна единице.

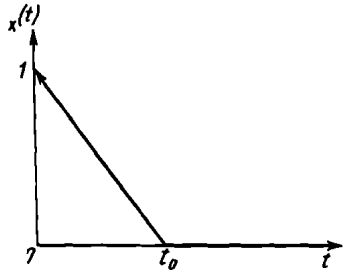


Рис. 20.7

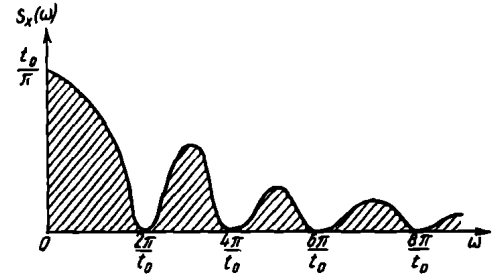


Рис. 20.8

Случайные процессы с независимыми приращениями. Случайный процесс $X(t)$, $t\in T$, называется *процессом с независимыми приращениями,* если для любых $t_i\in T$, $i=1, 2, \ldots, n$, $t_1<t_2, \ldots, t_i<t_{i+1}$, случайные величины

$$X(t_n)-X(t_{n-1}),\ X(t_{n-1})-X(t_{n-2}),\ \ldots,\ X(t_2)-X(t_1),\ X(t_1) \quad (20.17)$$

взаимно независимы. В этом случае для различных пар с. в. (20.17) корреляционная функция равна нулю.

Если с. в. (20.17) попарно некоррелированы, то случайный процесс $X(t)$ называется *процессом с некоррелированными* или *ортогональными приращениями.*

Известно, что если с. в. независимы, то они некоррелированы (ортогональны). Тем самым всякий процесс с независимыми приращениями есть процесс с ортогональными приращениями.

Пусть $X(t)$ — случайный процесс с ортогональными приращениями. Тогда для $t_1\geqslant t_2$ $(X(t_1)=x_1,\ X(t_2)=x_2)$

$$K_X(t_1, t_2)=\operatorname{cov}(X(t_1), X(t_2))=M((x_1-m_x(t_1))(x_2-m_x(t_2)))=$$
$$=M((x_1-x_2-m_x(t_1)+m_x(t_2)+x_2-m_x(t_2))(x_2-m_x(t_2)))=$$
$$=M((x_1-x_2-(m_x(t_1)-m_x(t_2))(x_2-m_x(t_2)))+$$

$$+M((x_2-m_x(t_2))^2)=\operatorname{cov}(X(t_1)-X(t_2),\ X(t_2))+\operatorname{cov}(X(t_2),$$
$$X(t_2))=\operatorname{cov}(X(t_2),\ X(t_2))=D(X(t_2)),$$

поскольку с. в. $X(t_1)-X(t_2)$ и $X(t_2)$ ортогональны.

Аналогично при $t_1 \leqslant t_2$ получим, что $K_X(t_1,\ t_2)=D(X(t_1))$.

Таким образом, корреляционная функция $K_X(t_1,\ t_2)$ случайного процесса с ортогональными приращениями обладает свойством

$$K_X(t_1,\ t_2)=\begin{cases}D(X(t_1)), & t_1 \leqslant t_2;\\ D(X(t_2)), & t_1 \geqslant t_2,\end{cases}= \tag{20.18}$$

$$=\operatorname{cov}\{X(\min(t_1,\ t_2)),\ X(\min(t_1,\ t_2))\}.$$

Используя функцию Хевисайда $1(t)$, корреляционную функцию (20.18) случайного процесса с ортогональными приращениями можно записать в виде

$$K_X(t_1,\ t_2)=\begin{cases}D(X(t_1))\ 1(t_2-t_1);\\ D(X(t_2))\ 1(t_1-t_2).\end{cases} \tag{20.19}$$

Задачи и упражнения

1. Указать, какая из функций может быть корреляционной функцией $K_X(t)$ стационарного случайного процесса:

а) const; б) $\cos t$; в) $\begin{cases}1, & |t|<1;\\ 0, & |t|\geqslant t;\end{cases}$ г) $\begin{cases}2, & t\leqslant 0;\\ e^{-|t|}, & t>0.\end{cases}$

2. Стационарный случайный процесс имеет корреляционную функцию:

а) $e^{-a|t|}$, $a>0$; б) $e^{-a^2t^2}$; в) $A+B\cos\omega t$; г) $e^{-a|t|}\cos\omega t$, $a>0$.

Определить соответствующие спектральные плотности распределения.

3. Найти спектральные плотности и корреляционные функции случайных процессов:

а) $x(t)=e(t)+ae(t-1)$; б) $x(t)+ax(t-1)=e(t-1)$;

в) $x(t)+ax(t-1)=e(t)+Ce(t-1)$, C — const,

где $e(t)$, $t\in\mathbf{N}$ — независимые нормально распределенные с. в. по закону $N(0,\ 1)$, $|a|<1$.

20.3. ОСНОВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Марковский процесс. Обобщением марковских цепей являются процессы Маркова. Процесс $X(t)$, $t\in T$, называется *марковским* или *процессом без последствия*, если при известном значении с. в. $X(t_1)$ значение с. в. $X(t)$, $t>t_1$, не зависит от значения с. в. $X(t_0)$, $t_0<t$. Таким образом, марковский процесс допускает зависимость исхода любого испытания только от исхода предыдущего испытания. Из этого определения следует, что случайный процесс $X(t)$ является марковским, если для любых n моментов времени $t_1<$ $<t_2<\ldots<t_{n-1}<t_n$ из T условная функция распределения вероятностей случайной величины $X(t_n)$ при известных $X(t_1)$, $X(t_2)$, ..., $X(t_{n-1})$ есть

$$P(X(t_n)<x_n|X(t_{n-1})=x_{n-1},\ X(t_2)=x_2,\ \ldots,\ X(t_1)=$$
$$=x_1)=P(X(t_n)<x_n|X(t_{n-1})=x_{n-1}) \tag{20.20}$$

для произвольных чисел $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$.

Равенство (20.20) в терминах условной плотности вероятностей с. в. $X(t_n)$ означает, что

$$f(x_n|x_{n-1}, \ldots, x_1) = f(x_n|x_{n-1}), \tag{20.21}$$

или

$$f(X(t_n) < x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \ldots, X(t_1) = x_1) = \\ = f(X(t_n) < x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}). \tag{20.22}$$

Функция (20.21) или (20.22) называется *условной переходной плотностью вероятностей.*

Пусть $X(t)$, $t \in T$,— марковский процесс с условной переходной плотностью вероятностей $f(x(t)|x(\tau))$, определенной для любых t и τ из T, $t > \tau$. Пусть $f(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1)$ — совместная плотность распределения с. в. $X(t_n)$, $X(t_{n-1})$, ..., $X(t_1)$ для любых n и $t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n$ из T. Согласно формуле умножения вероятностей (18.18),

$$f(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1) = f(x_n|x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1) f(x_{n-1}, \ldots, \\ x_2, x_1). \tag{20.23}$$

Но в силу того, что процесс марковский, имеет место равенство (20.21). Из него и из равенства (20.23) получим

$$f(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1) = f(x_n|x_{n-1}) f(x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1). \tag{20.24}$$

Повторив предыдущие рассуждения, найдем

$$f(x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1) = f(x_{n-1}|x_{n-2})\ f(x_{n-2}, \ldots, x_2, x_1).$$

Отсюда и из равенства (20.24) получаем

$$f(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1) = f(x_n|x_{n-1}) f(x_{n-1}|x_{n-2}) f(x_{n-2}, \ldots, x_2, x_1).$$

Повторив этот процесс $n-1$ раз, окончательно придем к равенству

$$f(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1) = \\ = f(x_n|x_{n-1}) f(x_{n-1}|x_{n-2}) \cdots f(x_2|x_1) f(x_1). \tag{20.25}$$

Для марковских процессов условные переходные плотности вероятностей $f(x_k|x_{k-1})$, $k = 2, 3, \ldots, n$, известны. Поэтому из равенства (20.25) следует, что при известной плотности распределения вероятностей $f(x_1)$ можно найти совместную плотность вероятностей марковского процесса.

Введем теперь понятие нормального, или гауссовского, случайного процесса. Случайный процесс $X(t)$, $t \in T$, называется *нормальным* или *гауссовским,* если для любых n моментов времени t_1, t_2, ..., t_n с. в. $X(t_1)$, $X(t_2)$, ..., $X(t_n)$ имеют совместную гауссовскую плотность вероятностей.

Пример 1. Пусть случайный процесс $x(t)$ описывается дифференциальным уравнением $\dot{x} = -\frac{1}{t+1} x$, где $x(0)$ — с. в., распределенная по нормальному закону $N(0, \sigma^2)$. Интегрируя уравнение процесса, получаем

$$x(t) = \frac{x(0)}{t+1}, \quad t \geqslant 0. \tag{20.26}$$

Так как $x(0)$ имеет нормальное распределение, то для любых n моментов времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$ из $[0, +\infty)$ совместная плотность вероятностей с. в. $x(t_1)=x_1$, $x(t_2)=x_2$, ..., $x(t_n)=x_n$ является гауссовской плотностью. Из равенств $x(t_1)=\dfrac{x(0)}{t_1+1}$, $x(t_2)=\dfrac{x(0)}{t_2+1}$, $t_2 \geqslant t_1 \geqslant 0$, следует, что $x(t_2)=\dfrac{t_1+1}{t_2+1}x(t_1)$, т. е. любое последующее состояние $x(t_2)$ случайного процесса зависит от предыдущего состояния $x(t_1)$. Следовательно, данный гауссовский процесс — марковский и для него выполнено равенство (20.21).

Так как для любых моментов $t>\tau$ $x(t)=\dfrac{\tau+1}{t+1}x(\tau)$, то на основании свойств 1° и 2° условного математического ожидания (§ 18.8) имеем $M(x(t)|x(\tau))=\dfrac{\tau+1}{t+1}x(\tau)=x(t)$. Для условной дисперсии $D(x(t)|x(\tau))$ получим

$$D(x(t)|x(\tau))=M((x(t)-x(t))^2)=0.$$

Условная дисперсия оказалась равной нулю, поскольку, зная $x(\tau)$, можно точно определить $x(t)$ для любого $t>\tau$.

Найдем теперь м. о. и дисперсию случайного процесса $x(t)$, $t>0$. Из равенства (20.26) имеем $\bar{x}(t)=M(x(t))=M\left(\dfrac{x(0)}{t+1}\right)=\dfrac{M(x(0))}{t+1}=0$ по условию. Далее

$$D(x(t))=M((x(t)-\bar{x}(t))^2)=M\left(\frac{x^2(0)}{(t+1)^2}\right)=\frac{\sigma^2}{(t+1)^2}.$$

Таким образом, совместная плотность вероятностей распределена по нормальному закону $N\left(0, \dfrac{\sigma^2}{(t+1)^2}\right)$, т. е.

$$f(x, t)=\frac{t+1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t+1)^2x^2}{2\sigma^2}}.$$

Пуассоновский процесс. Наиболее распространенным дискретным марковским процессом является *пуассоновский процесс*. Он широко используется в теории массового обслуживания. Этим процессом описываются такие величины, как число фотонов, испускаемых веществом при радиоактивном распаде, число телефонных вызовов из данного района, число происшествий на данном перекрестке, число заявок на обслуживание и др.

Реализация $X(t)$ пуассоновского процесса представляет собой число наступлений некоторого события, или *поток требований*, за период времени от нуля до t. Ясно, что всякая возможная реализация (траектория) $X(t)$ является неубывающей ступенчатой функцией. Реализация, изображенная на рис. 20.9, соответствует первому наступлению события в момент t_1, второму — в момент t_2, третьему — в момент t_3 и т. д. Общее число наступлений события возрастает только единичными скачками, причем $X(0)=0$, т. е. в начальный момент $t=0$ наступлений события нет.

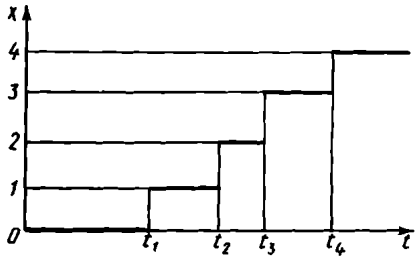


Рис. 20.9

Предположим, что выполнены следующие условия.

1. Поток требований в некото-

ром временно́м интервале I_1 не зависит от потока требований в любом другом интервале I_2, не пересекающемся с I_1.

2. Вероятность того, что за период времени Δt произойдет по меньшей мере одно событие (поступит одно требование), есть

$$p(\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t), \tag{20.27}$$

где λ — постоянная, называемая *интенсивностью потока требований*, а $\lim\limits_{\Delta t \to 0} (o(\Delta t)/\Delta t) = 0$.

3. Вероятность того, что за малый промежуток времени Δt поступит более одного требования, есть $o(\Delta t)$, т. е. величина более высокого порядка малости, чем Δt. Это условие исключает возможность более чем одного одновременного наступления события за малый промежуток времени.

Пусть $P_m(t) = P(X(t) = m)$ — вероятность того, что за время t поступит ровно m требований, $m = 0, 1, 2, \ldots$ Так как в начальный момент времени $t = 0$ поступлений нет $(X(0) = 0)$, то вероятность $P_0(0)$ наступления события $X(0) = 0$ равна единице: $P_0(0) = 1$. Кроме того, условие 3 равносильно равенству

$$\sum_{m=2}^{\infty} P_m(t) = o(\Delta t). \tag{20.28}$$

По теореме умножения вероятностей в силу независимости потока требований

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t) \cdot P_0(\Delta t) = P_0(t)(1 - p(\Delta t)).$$

Отсюда

$$\frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -P_0(t) \frac{p(\Delta t)}{\Delta t}. \tag{20.29}$$

Согласно равенству (20.27), $\lim\limits_{\Delta t \to 0} (p(\Delta t)/\Delta t) = \lambda$, поэтому, переходя в равенстве (20.29) к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем дифференциальное уравнение

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t). \tag{20.30}$$

Из начального условия $P_0(0) = 1$ и уравнения (20.30) находим

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}. \tag{20.31}$$

Найдем теперь $P_m(t)$ для любого m. Очевидно, что для поступления m требований в течение промежутка времени $(0, t + \Delta t)$ можно указать $m + 1$ взаимно исключающие возможности, приведенные в таблице:

Промежуток времени	Число требований						
$(0, t)$	m	$m-1$	$m-2$		2	1	0
$(t, t + \Delta t)$	0	1	2		$m-2$	$m-1$	m

Отсюда, используя формулу полной вероятности и теорему умножения вероятностей независимых событий, имеем

$$P_m(t+\Delta t)=P_m(t)P_0(\Delta t)+P_{m-1}(t)P_1(\Delta t)+$$
$$+\sum_{i=2}^{m}P_{m-i}(t)P_i(\Delta t)=P_m(t)P_0(\Delta t)+$$
$$+P_{m-1}(t)P_1(\Delta t)+o(\Delta t), \qquad (20.32)$$

так как $0\leqslant P_i(\Delta t)\leqslant 1$ и $\sum_{i=2}^{\infty}P_i(\Delta t)=o(\Delta t)$, согласно равенству (20.28). Но из равенства (20.31) следует, что $P_0(\Delta t)=e^{-\lambda\Delta t}=$ $=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)$. Так как $\sum_{i=1}^{\infty}p_i(\Delta t)=1$,

$$P_1(\Delta t)=1-P_0(\Delta t)-\sum_{i=2}^{\infty}P_i(\Delta t)=\lambda\Delta t+o(\Delta t).$$

В результате равенство (20.32) можно переписать в виде

$$P_m(t+\Delta t)=P_m(t)(1-\lambda\Delta t+o(\Delta t))+P_{m-1}(t)(\lambda\Delta t+o(\Delta t))+$$
$$+o(\Delta t)=P_m(t)-\lambda P_m(t)\Delta t+\lambda P_{m-1}(t)\Delta t+o(\Delta t).$$

Следовательно,

$$\frac{P_m(t+\Delta t)-P_m(t)}{\Delta t}=\lambda(P_{m-1}(t)-P_m(t))+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

В пределе при $\Delta t\to 0$ получим дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции $P_m(t)$:

$$P'_m(t)=\lambda(P_{m-1}(t)-P_m(t)),\ m=1,\ 2,\ \ldots, \qquad (20.33)$$

при начальных условиях

$$P_m(0)=0,\ m=1,\ 2,\ \ldots \qquad (20.34)$$

Для решения уравнения (20.33) введем замену

$$P_m(t)=e^{-\lambda t}Q_m(t),\ m=0,\ 1,\ \ldots, \qquad (20.35)$$

причем $Q_0(t)=P_0(t)\equiv 1$, $\forall t>0$. Подставив функцию (20.35) в уравнение (20.33), получим

$$Q'_m(t)e^{-\lambda t}-\lambda Q_m(t)e^{-\lambda t}=\lambda(Q_{m-1}(t)-Q_m(t))e^{-\lambda t},$$

откуда

$$Q'_m(t)=\lambda Q_{m-1}(t),\ m=1,\ 2,\ \ldots;\ Q_0(t)=1. \qquad (20.36)$$

Последовательно интегрируя уравнение (20.36), имеем

$$Q'_1(t)=\lambda\Rightarrow Q_1(t)=\lambda t+C_1.$$

Так как $Q_1(0)=P_1(0)=0$, то $Q_1(t)=\lambda t$. Далее

$$Q'_2(t)=\lambda Q_1(t)=\lambda^2 t\Rightarrow Q_2(t)=\lambda^2t^2/2+C_2.$$

Из условия $Q_2(0)=P_2(0)=0$ находим, что $C_2=0$, т. е. $Q_2(t)=$ $=\lambda^2t^2/2$.

Рассуждая аналогично, по индукции найдем $Q_m(t)=\lambda^m t^m/m!$ Следовательно, с учетом замены (20.35) получаем

$$P_m(t)=\frac{\lambda^m t^m}{m!}e^{-\lambda t}=\frac{(\lambda t)^m}{m!}e^{-\lambda t}. \qquad (20.37)$$

Итак, при каждом t с. в. $X(t)$ — число поступлений требований в период от 0 до t — подчиняется распределению Пуассона с параметром λt. Из распределения Пуассона следует, что $M(X(t))=\lambda t$, $D(X(t))=\lambda t$. Таким образом, ожидаемое число поступлений требований пуассоновского процесса в промежутке $(0, t)$ равно λt.

Исследование на экстремум функции $P_m(t)$ при $t\geqslant 0$ показывает, что наибольшая вероятность поступления m требований соответствует времени $t=m/\lambda$. На рис. 20.10 приведены графики траекторий пуассоновского процесса для различных значений $a=\lambda t$. Из рисунка видно, что при увеличении интенсивности λ или времени траектории пуассоновского потока становятся все более симметричными. На рис. 20.11 приведены графики функции $P_m(t)$ при $\lambda=1$.

Можно показать, что пуассоновский процесс является процессом с независимыми приращениями. В связи с этим, согласно

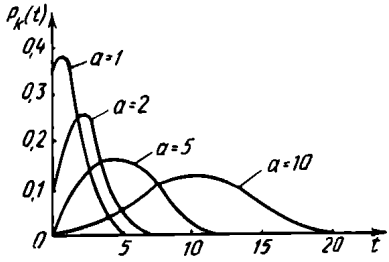


Рис. 20.10

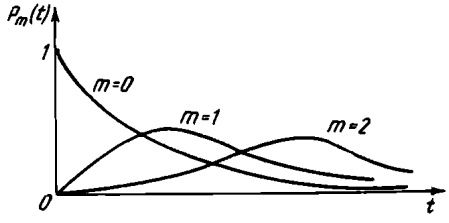


Рис. 20.11

равенствам (20.19) и $D(X(t))=\lambda t$, корреляционная функция пуассоновского процесса имеет вид

$$K_X(t_1, t_2)=\begin{cases}\lambda t_1\cdot 1(t_2-t_1); \\ \lambda t_2\cdot 1(t_1-t_2)\end{cases}=\lambda\min(t_1, t_2).$$

Формула (20.37) дает распределение вероятностей числа поступающих требований за данный промежуток времени t. Найдем теперь распределение вероятностей промежутка времени T между двумя последовательными моментами поступления требований. Это распределение следует из формулы (20.37) при $m=0$, так как величина $P_0(t)$ есть вероятность $P(T>t)$ того, что с. в. T превзойдет t. Следовательно, согласно формуле (20.37), при $m=0$

$$F(t)=P(T<t)=1-P(T>t)=1-e^{-\lambda t}. \qquad (20.38)$$

Отсюда плотность вероятностей

$$f(t)=F'(t)=\lambda e^{-\lambda t},\ t\geqslant 0, \qquad (20.39)$$

т. е. длительность промежутка времени между двумя последовательными моментами поступления требований пуассоновского потока имеет показательное распределение. Обычно говорят, что пуассоновский поток требований характеризуется показательным распределением промежутков между требованиями. При этом

$$M(T)=\int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t}dt=1/\lambda;\quad D(T)=\int_0^\infty (t-1/\lambda)^2\lambda e^{-\lambda t}dt=1/\lambda^2.$$

Итак, средний промежуток времени между двумя последовательными моментами поступления требований равен величине, обратной интенсивности потока.

Важной чертой показательного распределения является отсутствие последействия, т. е. прошлая история показательно распределенной с. в. не играет никакой роли в предсказании ее будущего. Другими словами, формулы (20.38) и (20.39) определяют закон распределения вероятностей для интервала времени не только между двумя последовательными моментами времени поступления требований, но и между произвольным фиксированным моментом времени, в течение которого не поступило ни одного требования, и ближайшим моментом поступления требования. В самом деле, пусть T — интервал времени между двумя последовательными моментами поступления требований, а t_0 — время, прошедшее после поступления последнего требования (рис. 20.12). Тогда функция распределения $F_1(t)$ оставшегося интервала времени $T-t_0$, согласно равенству (20.38) и формуле условной вероятности (18.16),

$$F_1(t)=P(T-t_0<t\,|\,T>t_0)=\frac{P(T-t_0<t,\ T>t_0)}{P(T>t_0)}=$$

$$=\frac{P(t_0<T<t_0+t)}{P(T>t_0)}=\frac{F(t_0+t)-F(t_0)}{1-F(t_0)}=$$

$$=\frac{e^{-\lambda t_0}-e^{-\lambda(t+t_0)}}{e^{-\lambda t_0}}=1-e^{-\lambda t}=F(t).$$

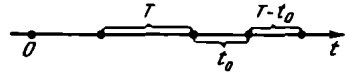


Рис. 20.12

Из формулы следует, что распределение времени, оставшегося до поступления следующего требования, при условии, что с момента поступления предыдущего требования прошло уже t_0 секунд, тождественно равно безусловному распределению промежутков времени между соседними требованиями. Это дает основание считать, что время до поступления следующего требования не зависит от того, сколько времени прошло с момента поступления предыдущего требования. Иными словами, будущее показательно распределенной с. в. не зависит от прошлой истории этой величины, и это распределение остается неизменным во времени.

Понятие белого шума. Термин «белый шум» используется обычно для описания случайных флуктуаций, встречающихся в электронике и технике связи.

Стационарный процесс со спектральной плотностью $S(\omega)=A$, где $A=\text{const}$, называется *белым шумом*. Из определения следует, что белый шум имеет одинаковую плотность энергии на всех частотах ω. Поэтому по аналогии со светом такие процессы называются процессами типа белого шума.

Найдем корреляционную функцию для белого шума с дискретным временем. По формуле (20.11)

$$K_X(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S(\omega)e^{i\omega n}d\omega=\frac{A}{2\pi}\,\frac{e^{i\omega n}}{in}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=A\,\frac{\sin n\pi}{n\pi}.$$

Таким образом,

$$K_X(n)=\begin{cases}A, & n=0;\\ 0, & n=\pm 1,\ \pm 2,\ \pm\ldots\end{cases}$$

Отсюда следует, что значения $X(n)$ белого шума в различные моменты времени некоррелированы, а для гауссовского белого шума они независимы.

Итак, белый шум с дискретным временем есть стационарный случайный процесс, состоящий из последовательности попарно некоррелированных с. в. $X(n)$.

Пусть $X(t)$ — белый шум с непрерывным временем t. По формуле (20.14) его дисперсия

$$D(X(t))=K_X(0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}S(\omega)d\omega=\frac{A}{\pi}\int_0^{\infty}d\omega=\infty.$$

Итак, для белого шума с непрерывным временем дисперсия бесконечна.

Так как по формуле (17.105) $\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}d\omega=2\pi\delta(t)$, где $\delta(t)$ — δ-функция Дирака, то корреляционную функцию белого шума можно записать в виде

$$K_X(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}Ae^{i\omega t}d\omega=A\delta(t).$$

Отсюда $K_X(t_2-t_1)=A\delta(t_2-t_1)$.

Следовательно, с. в. $X(t_1)$ и $X(t_2)$ белого шума $X(t)$ для любых моментов времени t_1 и t_2, $t_1\neq t_2$, являются некоррелированными.

Несмотря на трудности, возникающие вследствие бесконечности дисперсии, понятие белого шума очень важно в теории случайных процессов. Белый шум часто используется для моделирования случайных процессов, имеющих постоянную спектральную плотность в определенной полосе частот в тех случаях, когда несущественно поведение спектральной плотности вне интересующего диапазона частот. Некоррелированность значений белого шума в различные моменты времени — основная причина его широкого применения. Использование белого шума в теории случайных процессов во многом аналогично использованию δ-функции Дирака при анализе линейных систем.

Задачи и упражнения

1. Пусть $X(t)$, $t\in T$,— марковский случайный процесс и $T_1\subset T$. Доказать, что процесс $X(t)$, $t\in T_1$, тоже марковский.

2. Показать, что процесс $x(t)$, описываемый разностным уравнением $x(t+1)=a(t)x(t)+\omega(t)$, $t=0, 1, 2, \ldots$,— марковский. Здесь $a(t)$ — неслучайная последовательность чисел, а $\omega(t)$ — нормально распределенная по закону $N(0, 1)$ последовательность чисел.

21. ОСНОВЫ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

21.1. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Точные и приближенные числа. Источники погрешностей. При вычислениях приходится оперировать двумя видами чисел — точными и приближенными. К *точным* относятся числа, которые дают истинное значение исследуемой величины. К *приближенным* относятся числа, близкие к истинному значению, причем степень близости определяется *погрешностью вычисления*. Например, в утверждениях:«в аудитории 25 студентов», «в январе 31 день», «стоимость костюма 125 руб.» числа 25; 31 и 125 точные. В высказываниях: «прыжок в высоту на 239 см», «масса помидоров 10,5 кг», «угол 41,7 рад» числа 239; 10,5 и 41,7 приближенные. При измерениях появление приближенных чисел обусловлено несовершенством измерительных приборов. Кроме того, часто нет необходимости знать точное значение какой-либо величины. Например, известно, что расстояние от Бреста до Москвы 1054 км. Ясно, что это число приближенное. Пассажиру, едущему из Бреста в Москву, неважно, что это расстояние может быть короче на 200 м или длиннее на 150 м.

Решение большинства практических задач включает два этапа: 1) создание математической модели задачи; 2) решение сформулированной (в этой модели) математической задачи (часто это решение осуществляется с помощью ЭВМ). В этом случае источниками погрешностей решения являются: а) несовершенство математической модели; б) неточное задание исходных данных, являющихся, как правило, результатами экспериментов; в) погрешность метода решения математической задачи; г) погрешность округлений при выполнении арифметических действий над числами, а также при вводе данных в ЭВМ и выводе результатов счета из ЭВМ.

Погрешности в решении, обусловленные пунктами «а» и «б», называются *неустранимыми*.

Используемый численный метод решения математической задачи, является, как правило, приближенным в том смысле, что он не дает точного решения задачи, а определяет его с некоторой погрешностью, называемой *погрешностью метода* или *погрешностью аппроксимации*.

Наконец, в самом процессе решения задачи происходит округление исходных данных, промежуточных и окончательных результатов. Возникающие при этом погрешности влияют на результат вычисления и образуют так называемую *вычислительную погрешность* или *погрешность округления*.

При решении любой практической задачи необходимо указы-

вать требуемую точность решения, т. е. задавать погрешность, максимально допустимую в процессе всех вычислений. В связи с этим при работе с приближенными числами необходимо: 1) зная заданную точность исходных данных, уметь оценивать точность результата; 2) выбирать исходные данные с такой точностью, которая обеспечивала бы заданную точность результата.

Округление чисел. Любое десятичное число

$$x = \pm a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0, \; a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-m} \tag{21.1}$$

представимо в виде

$$x = \pm a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 + a_{-1} \times \\ \times 10^{-1} + \ldots + a_{-m} \cdot 10^{-m}. \tag{21.2}$$

Например, $1358{,}76041 = 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 8 + 7 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 0 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-4} + 1 \cdot 10^{-5}$.

Часто бывает необходимо заменить данное число x другим, приближенным числом $\hat{x}$ с меньшим количеством цифр. Такая замена называется *округлением* числа. Округление чисел производится по следующему правилу.

Если первая из отбрасываемых цифр числа, считая слева направо, больше или равна пяти, то последняя оставшаяся цифра числа увеличивается на единицу, в противном случае эта цифра остается без изменения.

Пример 1. Округлить числа $x_1 = 27{,}86543$, $x_2 = 1386{,}453$ и $x_3 = 954{,}387561$ до пяти цифр.

□ Следуя правилу округления, получаем $\hat{x}_1 = 27{,}865$, $\hat{x}_2 = 1386{,}5$, $\hat{x}_3 = 954{,}39$.

Абсолютная и относительная погрешности. Пусть x — точное число, $\hat{x}$ — его приближенное значение (его приближение). Если $\hat{x} < x$, то говорят, что $\hat{x}$ является приближенным значением числа x *по недостатку;* если же $\hat{x} > x$,— приближенным значением *по избытку.*

Разность $x - \hat{x}$ называется *ошибкой* или *погрешностью приближенного числа* x. Часто знак ошибки неизвестен, поэтому используется так называемая *абсолютная погрешность* $\Delta(\hat{x})$ приближенного числа, определяемая равенством

$$\Delta(\hat{x}) = |x - \hat{x}|, \tag{21.3}$$

откуда $x = \hat{x} \pm \Delta(\hat{x})$.

Относительной погрешностью приближенного числа $\hat{x} \neq 0$ называется величина

$$\delta(\hat{x}) = \frac{\Delta(\hat{x})}{|\hat{x}|} = \left| \frac{x - \hat{x}}{\hat{x}} \right|. \tag{21.4}$$

Относительную погрешность часто выражают в процентах:

$$\delta(\hat{x}) = \frac{\Delta(\hat{x})}{|\hat{x}|} \cdot 100\ \%.$$

Так как x неизвестно, то и $\Delta(\hat{x})$ и $\delta(\hat{x})$ тоже неизвестны. Однако бывают известны оценки сверху $\Delta(\hat{x}) \leqslant \Delta$ и $\delta(\hat{x}) \leqslant \delta$ этих величин. В этом случае будем говорить, что абсолютная и относительная погрешности приближенного числа $\hat{x}$ не превосходят Δ и δ соответственно. Если $\Delta(\hat{x}) = |x - \hat{x}| \leqslant \Delta$, то говорят, что *число $\hat{x}$ является приближением числа x с точностью Δ*. В этом случае $\hat{x} - \Delta \leqslant x \leqslant \hat{x} + \Delta$.

Числа Δ и δ называются *предельными абсолютной* и *относительной погрешностями* приближенного числа.

Верные значащие цифры. Запись приближенных чисел должна подчиняться правилам, связанным с понятием о верных значащих цифрах.

Первая слева отличная от нуля цифра числа x и все расположенные справа от нее цифры называются *значащими*. Например, числа 0,00028745 и 200,37500 имеют соответственно 5 и 8 значащих цифр. Цифра a_i числа (21.1) называется *верной* (в широком смысле), если $\Delta(\hat{x}) \leqslant 10^i$, т. е. абсолютная погрешность числа $\hat{x}$ не превосходит одной единицы соответствующего разряда десятичного числа. Если верная цифра a_i — значащая, то она называется *верной значащей цифрой*. Приближенные числа принято записывать таким образом, чтобы вид записи числа показывал его абсолютную погрешность, которая не должна превосходить единицы последнего разряда, сохраняемого при записи. Другими словами, выписываются только верные цифры числа, при этом верные нули на правом конце числа не отбрасываются. Цифры, не являющиеся верными, называются *сомнительными*.

Пример 2. Числа 27,0563 и 27,0563000 как приближенные различны. Абсолютная погрешность первого числа не превосходит $10^{-4} (i = -4)$, а второго — 10^{-7} $(i = -7)$.

Пример 3. Числа $x_1 = 34{,}174562$ и $x_2 = 375{,}16342$ содержат пять верных цифр. Определить их абсолютную погрешность.

□ В первом числе последняя верная значащая цифра 4 (считая слева) находится на третьем месте после запятой, т. е. $i = -3$. Следовательно, по определению $\Delta(\hat{x}_1) = 10^{-3} = 0{,}001$. Во втором числе последняя значащая цифра 6 имеет индекс $i = -2$. Следовательно, $\Delta(\hat{x}_2) = 0{,}01$.

Пример 4. Абсолютная погрешность чисел $x_1 = 28{,}9356$ и $x_2 = 183{,}45123$ составляет $\Delta = 0{,}03$. Определить, какие цифры являются верными, и округлить числа, оставив только верные цифры.

□ В примере задана максимальная абсолютная погрешность $\Delta = 0{,}03$. Следовательно, по определению верной значащей цифры должно быть $\Delta(\hat{x}) \leqslant 10^i \leqslant 0{,}03$, т. е. $i = -2$. Итак, в заданных числах $x_1 = \underline{28{,}935}$ и $x_2 = \underline{183{,}45}123$ верными являются подчеркнутые цифры. Округлив их, получим $\hat{x}_1 = 28{,}94$, $\hat{x}_2 = 183{,}45$.

Замечание. При записи чисел могут встречаться некоторые тонкости. Например, запись 5,1813 означает, что абсолютная погрешность этого приближенного числа не превосходит 0,0001, а запись 680 — что абсолютная погрешность не превосходит единицы. Если же это число имеет большую точность, следует писать 680,0. Тем самым числа $68 \cdot 10$; 680; 680,0; 680,00 имеют различную степень точности. Если надо показать, что у числа 680,00 первые три цифры верные значащие, то его следует писать в виде 680, а для числа 600028 с тремя верными слева значащими цифрами следует писать $600 \cdot 10^3$. В соответствии с этим округление, например, числа 280065 до 1, 2, 3 верных значащих цифр имеет вид $3 \cdot 10^4$, $28 \cdot 10^3$, $280 \cdot 10^2$ соответственно.

Связь между числом верных знаков и погрешностью числа. Пусть число $\hat{x}$ является приближенным значением точного числа x и имеет вид

$$\hat{x} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_i \cdot 10^i + \ldots + a_{-m} \cdot 10^{-m}, \quad a_n \geqslant 1,$$

где цифры a_n, a_{n-1}, ..., a_i — верные. По определению число верных знаков числа $\hat{x}$ определяется неравенством $\Delta(\hat{x}) = |x - \hat{x}| \leqslant 10^i$. Разделив обе части этого неравенства на $|\hat{x}|$, получим

$$\delta(\hat{x}) = \frac{|x-\hat{x}|}{|\hat{x}|} \leqslant \frac{10^i}{|a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_i \cdot 10^i + \ldots + a_{-m} \cdot 10^{-m}|}.$$

Это неравенство еще больше усилится, если число $\hat{x}$ заменить заведомо меньшим числом $a_n \cdot 10^n$. При этом

$$\delta(\hat{x}) \leqslant \frac{10^i}{a_n \cdot 10^n} = \frac{1}{a_n} \cdot 10^{i-n}.$$

Таким образом, за предельную относительную погрешность δ приближенного числа Δ можно принять величину

$$\delta \leqslant \frac{1}{a_n} \cdot 10^{i-n}, \tag{21.5}$$

где a_n — первая верная значащая цифра числа $\hat{x}$; а a_i — последняя значащая цифра этого числа.

Пример 5. Какова предельная относительная погрешность в процентах чисел $x_1 = 358{,}563$ и $x_2 = 0{,}047$, если все их цифры — верные.

□ По формуле (21.5) для числа x_1 имеем ($n = 3$, $i = -3$) $\delta_1 = \frac{1}{3} \cdot 10^{-3-3} \times$ $\times 100\,\% = 0{,}00003\,\%$, а для числа x_2($n = -2$, $i = -3$) получим $\delta_2 = \frac{1}{4} \times$ $\times 10^{-3-(-2)} \cdot 100\,\% = 2{,}5\,\%$.

Пример 6. Со сколькими верными десятичными знаками надо взять $\sqrt[3]{28}$, чтобы погрешность не превышала 0,25 %?

□ Так как $\sqrt[n]{1+\alpha} \approx 1 + \alpha/n$ при α достаточно малых, то $\sqrt[3]{28} = \sqrt[3]{27+1} = 3\sqrt[3]{1+1/27} = 3(1+1/81) \simeq 3{,}037037$. По условию $\delta \leqslant 0{,}25\,\%$, т. е. $\delta \leqslant 0{,}0025$, и $a_n = 3$, $n = 0$. Согласно формуле (21.5), имеем $0{,}0025 \geqslant \frac{1}{3} \cdot 10^{i-0} \Leftrightarrow 10^i \leqslant$ $\leqslant 0{,}0075 \Rightarrow i = -4$. Таким образом, число $\sqrt[3]{28} \approx \underline{3{,}037}037$, где верные цифры подчеркнуты.

Нормализованная форма числа. Приближенные числа принято записывать таким образом, чтобы все цифры числа, кроме нулей впереди, если они есть, были значащими и верными цифрами. О числах $0{,}63750 \cdot 10^6$; $637{,}50 \cdot 10^3$; $6{,}3750 \cdot 10^5$ и $6375{,}0 \cdot 10$ говорят, что они записаны *в форме с плавающей запятой*. Обычную форму записи числа называют записью *с фиксированной запятой*. Запись числа с плавающей запятой, как следует из примера, не является однозначной. Для устранения этой неоднозначности принято первый множитель брать меньше единицы и он должен состоять только из значащих цифр (кроме нуля целых). Следовательно, его первая цифра после запятой всегда отлична от нуля. Такая форма записи

числа называется *нормализованной*. Так, в нашем примере ею является запись $0{,}63750 \cdot 10^6$. Для числа же $-0{,}00384$ нормализованной формой будет запись $-0{,}384 \cdot 10^{-2}$.

Итак, запись числа x в нормализованной форме имеет вид $x = x_0 \cdot 10^p$, $0{,}1 \leqslant |x_0| < 1$. Число x_0 называется *мантиссой* числа x, а число p — его *порядком*. Например, для числа $620 = 0{,}620 \cdot 10^3$ мантиссой является 0,620, а порядком — число 3. Заметим, что в этой записи все цифры после запятой верные.

Погрешности арифметических действий. Оценим теперь погрешности, возникающие при арифметических операциях с приближенными числами.

Пусть x и y — точные числа, $\hat{x}$ и $\hat{y}$ — их приближения, $\Delta(\hat{x})$ и $\Delta(\hat{y})$ — их абсолютные, а $\delta(\hat{x})$ и $\delta(\hat{y})$ — их относительные погрешности соответственно.

1. Погрешность суммы. Имеют место формулы:

$$\Delta(\hat{x} \pm \hat{y}) \leqslant \Delta(\hat{x}) + \Delta(\hat{y}); \tag{21.6}$$

$$\delta(\hat{x} \pm \hat{y}) \leqslant \frac{\Delta(\hat{x}) + \Delta(\hat{y})}{|\hat{x} \pm \hat{y}|}. \tag{21.7}$$

Действительно, $\Delta(\hat{x} \pm \hat{y}) = |(x \pm y) - (\hat{x} \pm \hat{y})| = |(x - \hat{x}) \pm (y - \hat{y})| \leqslant |x - \hat{x}| + |y - \hat{y}| = \Delta(\hat{x}) + \Delta(\hat{y})$.

Неравенство (21.7) следует из определения относительной погрешности (21.4) и формулы (21.6).

Итак, абсолютная погрешность суммы или разности двух приближенных чисел не превышает суммы их абсолютных погрешностей.

Отсюда следует *правило сложения приближенных чисел различной абсолютной точности:*

1) выделяются числа, имеющие наибольшую абсолютную погрешность (числа наименьшей точности);

2) более точные числа округляются таким образом, чтобы сохранить в них на один знак больше, чем в выделенном числе (запасной знак);

3) производится сложение (вычитание) всех чисел с учетом сохраненных знаков;

4) полученный результат округляется на один знак.

Пример 7. Вычислить $a = 0{,}1732 + 17{,}45 - 0{,}00354$ (все цифры чисел верные).

□ Поскольку цифры всех чисел верные, то погрешность вычисления первого слагаемого не превышает 0,0001, второго — 0,01, третьего — 0,00001. Наибольшую погрешность имеет второе слагаемое 17,45, поэтому числа 0,1732 и 0,00354 округляем до трех знаков после запятой. В результате получим приближенное число $\hat{a} = 0{,}173 + 17{,}45 - 0{,}004 = 17{,}619$. Допускаемая при этом погрешность $\Delta(\hat{a})$ не превышает величины $0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}00001 = 0{,}01101$. Округлив $\hat{a}$ до двух знаков после запятой, окончательно получим $\hat{a} = 17{,}62$.

2. Погрешность произведения. Справедливы формулы:

$$\Delta(\hat{x}\hat{y}) \leqslant |\hat{x}|\Delta(\hat{y}) + |\hat{y}|\Delta(\hat{x}) + \Delta(\hat{x})\Delta(\hat{y}); \tag{21.8}$$

$$\delta(\hat{x}\hat{y}) \leqslant \delta(\hat{x}) + \delta(\hat{y}) + \delta(\hat{x})\delta(\hat{y}). \tag{21.9}$$

В самом деле, пусть $x = \hat{x} + \Delta(\hat{x})$ и $y = \hat{y} + \Delta(\hat{y})$. Тогда $\Delta(\hat{x}\hat{y}) = |xy - \hat{x}\hat{y}| = |(x + \Delta(x))(y + \Delta(y)) - \hat{x}\hat{y}| = |\hat{x}\Delta(\hat{y}) + \hat{y}\Delta(\hat{x}) + \Delta(\hat{x})\Delta(\hat{y})| \leqslant |\hat{x}|\Delta(\hat{y}) + |\hat{y}|\Delta(\hat{x}) + \Delta(\hat{x})\Delta(\hat{y})$. Разделив теперь обе части неравенства (21.8) на $|\hat{x}, \hat{y}| \neq 0$, придем к формуле (21.9).

Из уравнения (21.8) следует *правило умножения приближенных чисел* различной абсолютной точности:

1) выделяется число с наименьшим количеством верных значащих цифр;

2) оставшиеся сомножители округляются таким образом, чтобы они содержали на одну значащую цифру больше, чем количество верных значащих цифр в выделенном числе;

3) в произведении сохраняется столько значащих цифр, сколько верных значащих цифр имеет выделенное число.

Пример 8. Найти произведение приближенных чисел $x_1 = 3{,}75$ и $x_2 = 0{,}73788$, все цифры которых верные.

□ Первое число содержит три верные значащие цифры, второе — пять, поэтому второе число округляем до четырех значащих цифр: $x_2 = 0{,}7379$. Тогда $x_1x_2 = 3{,}75 \cdot 0{,}7379 = 2{,}767125$. В этом произведении сохраняем три значащие цифры, так что $x_1x_2 = 2{,}76$. Заметим, что $3{,}75 \cdot 0{,}73788 = 2{,}76705$.

3. Погрешность частного. Докажем, что при $y \neq 0$ и $\hat{y} \neq 0$ имеют место формулы:

$$\Delta\left(\frac{\hat{x}}{\hat{y}}\right) \leqslant \frac{|\hat{x}|\Delta(\hat{y}) + |\hat{y}|\Delta(\hat{x})}{\hat{y}^2} \frac{1}{1 - \delta(\hat{y})}; \tag{21.10}$$

$$\delta\left(\frac{\hat{x}}{\hat{y}}\right) \leqslant \frac{\delta(\hat{x}) + \delta(\hat{y})}{1 - \delta(\hat{y})}. \tag{21.11}$$

Действительно, пусть $x = \hat{x} + \Delta(\hat{x})$, $y = \hat{y} + \Delta(\hat{y})$. Тогда

$$\Delta\left(\frac{\hat{x}}{\hat{y}}\right) = \left|\frac{x}{y} - \frac{\hat{x}}{\hat{y}}\right| = \left|\frac{x\hat{y} - \hat{x}y}{y\hat{y}}\right| =$$

$$= \left|\frac{(\hat{x} + \Delta(\hat{x}))\hat{y} - \hat{x}(\hat{y} + \Delta\hat{y}))}{(\hat{y} + \Delta(\hat{y}))\hat{y}}\right| = \left|\frac{\hat{y}\Delta(\hat{x}) - \hat{x}\Delta(\hat{y})}{\hat{y}^2(1 + \Delta(\hat{y})/\hat{y})}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\hat{y}|\Delta(\hat{x}) + |\hat{x}|\Delta(\hat{y})}{|\hat{y}^2(1 + \Delta(\hat{y})/\hat{y})|} \leqslant \frac{|\hat{x}|\Delta(\hat{y}) + |\hat{y}|\Delta(\hat{x})}{\hat{y}^2(1 - \delta(\hat{y}))},$$

так как $|1 + \Delta(\hat{y})/\hat{y}| \geqslant 1 - \Delta(\hat{y})/|\hat{y}| = 1 - \delta(\hat{y})$, согласно неравенству $|a \pm b| \geqslant ||a| - |b||$. Тем самым неравенство (21.10) установлено. Разделив обе его части на $|\hat{x}/\hat{y}|$, получим формулу (21.11).

Таким образом, получаем следующее *правило деления приближенных чисел* различной абсолютной точности:

1) выделяется число с наименьшим количеством верных значащих цифр;

2) оставшиеся числа округляются таким образом, чтобы они содержали на одну значащую цифру больше, чем выделенное число;

3) в полученном результате сохраняется столько значащих цифр, сколько верных значащих цифр имеет выделенное число.

На практике при работе с числами достаточно хорошей точности обычно считают, что $\Delta(\hat{x})\Delta(\hat{y}) \approx 0$, $\delta(\hat{x})\delta(\hat{y}) \approx 0$, $1 - \delta(\hat{y}) \approx 1$. По-

этому вместо формул (21.8) — (21.11) можно пользоваться более упрощенными формулами:

$$\Delta(\hat{x}\hat{y}) \leqslant |\hat{x}|\Delta(\hat{y}) + |\hat{y}|\Delta(\hat{x}); \quad \delta(\hat{x}\hat{y}) \leqslant \delta(\hat{x}) + \delta(\hat{y});$$

$$\Delta\left(\frac{\hat{x}}{\hat{y}}\right) \leqslant \frac{|\hat{x}|\Delta(\hat{y}) + \hat{y}\Delta(\hat{x})}{\hat{y}^2}; \quad \delta\left(\frac{\hat{x}}{\hat{y}}\right) \leqslant \delta(\hat{x}) + \delta(\hat{y}).$$

Задачи и упражнения

1. Округлить числа $a_1 = 2{,}1514$, $a_2 = 0{,}16152$, $a_3 = -0{,}0016395$ до трех значащих цифр и определить предельные абсолютную и относительную погрешности полученных приближенных чисел.

2. Определить количество верных знаков в числе $\hat{x}$, если известна его абсолютная погрешность: а) $\hat{x} = 0{,}3941$, $\Delta(\hat{x}) = 0{,}0025$; б) $\hat{x} = 0{,}1132$, $\Delta(\hat{x}) = 0{,}0001$; в) $\hat{x} = 14{,}00231$, $\Delta(\hat{x}) = 0{,}0001$.

3. Определить количество верных знаков в числе $\hat{x}$ по известной предельной относительной погрешности δ: а) $\hat{x} = 1{,}8921$, $\delta = 0{,}001$; б) $\hat{x} = 0{,}02425$, $\delta = 0{,}5\ \%$.

4. Со сколькими десятичными знаками надо взять число 20, чтобы погрешность не превышала 0,1?

5. Вычислить (все цифры верные): а) $398{,}5 - 72{,}28 + 0{,}34567$; б) $482{,}56 \times \times 7256 \cdot 0{,}0052$; в) $7{,}3 \cdot 4491$.

21.2. АЛГОРИТМЫ

Общее понятие алгоритма. Численное решение задачи обычно начинается с построения алгоритма, дающего искомое решение. Алгоритм — это точное предписание совокупности операций, которые необходимо выполнить, чтобы получить решение задачи данного типа. Алгоритм должен удовлетворять следующим требованиям: 1) быть достаточно простым; 2) сравнительно быстро приводить к искомому результату; 3) быть пригодным для решения любой задачи определенного класса.

Способы описания алгоритмов. Алгоритмизация вычислительного процесса является одним из главных этапов решения математической задачи. При этом алгоритм решения задачи должен быть записан в компактной, наглядной и легко понимаемой форме. Как правило, алгоритмы обычно описывают с помощью графического изображения его структуры, называемого *схемой алгоритмов*. Каждый шаг алгоритма изображается в виде прямоугольника, ромба, кружка и т. д. В них приводятся содержание соответствующего шага алгоритма и правило выбора следующего шага. Графические изображения шагов алгоритма соединяются между собой линиями и стрелками, указывающими на последовательность выполнения операций.

В схеме алгоритмов обычно выделяется шаг, на котором проверяется некоторое условие. На этом шаге происходит разветвление вычислительного процесса. В прямоугольнике записывается выполняемая операция, овалом обозначается начало и конец алгоритма («пуск» и «останов»). Направление последовательности этапов выполнения алгоритма — сверху вниз и слева направо. Эти направления считаются основными, если стрелкой не указано другое на-

правление. На соединительных линиях может быть указано некоторое дополнительное пояснение. Для окончания вычислительного процесса по данному алгоритму необходимо сформулировать условие прекращения его работы. Таким условием может быть полученное точное решение или достижение заданной точности приближенного решения.

Пример 1. Разработать и описать алгоритм вычисления функции

$$f(x)=\begin{cases} -4, & \text{если } x<0; \\ x^2+3x+4, & \text{если } 0\leqslant x<1; \\ (x^2+3x+4)^2, & \text{если } x\geqslant 1, \end{cases}$$

и привести схему алгоритма.

□ Процесс вычисления этой функции можно разбить на следующие этапы.

Шаг 0. Берем начальное значение x.

Шаг 1. Проверяем условие $x<0$. Если «Да», т. е. $x<0$, полагаем $f(x)=-4$ и переходим к шагу 4. Если «Нет», т. е. $x\geqslant 0$, переходим к шагу 2.

Шаг 2. Проверяем условие $x<1$. Если $x<1$, вычисляем $f(x)=x^2+3x+4$ и переходим к шагу 4. Если же $x\geqslant 1$, переходим к шагу 3.

Шаг 3. Вычисляем $f(x)=(x^2+3x+4)^2$ и переходим к шагу 4.

Шаг 4. Прекратить вычислительный процесс.

Схема этого алгоритма изображена на рис. 21.1.

Схема Горнера*. В качестве примера алгоритма приведем способ вычисления значений многочлена по схеме Горнера.

Пусть дан многочлен n-й степени

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

с действительными коэффициентами a_i, $i=1, 2, \ldots$, и требуется найти значение этого многочлена при $x=\xi$, т. е. вычислить

$$P_n(\xi)=a_0\xi^n+a_1\xi^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\xi+a_n. \qquad (21.12)$$

Запишем выражение (21.12) в виде

$$P_n(\xi)=(\ldots(((a_0\xi+a_1)\xi+a_2)\xi+a_3)\xi+\ldots+a_{n-1})\xi+a_n).$$

Обозначим

$$\begin{array}{ll} & b_0=a_0; \\ c_1=b_0\xi, & b_1=a_1+c_1; \\ c_2=b_1\xi, & b_2=a_2+c_2; \\ c_3=b_2\xi, & b_3=a_3+c_3; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ c_n=b_{n-1}\xi, & b_n=a_n+c_n \end{array} \qquad (21.13)$$

Тогда ясно, что $b_n=P_n(\xi)$. Таким образом, вычисление $P_n(\xi)$ сводится к повторению элементарных операций $c_i=b_{i-1}\xi$, $b_i=a_i+c_i$, $i=1, 2, \ldots, n$. При этом число $b_i=a_i+c_i$ и является выражением, заключенным в i-ю скобку, считая с самой внутренней, 1-й скобки.

Описанный вычислительный процесс (схему Горнера) можно задать в виде рекуррентного соотношения

* У. Дж. Горнер (1786—1837) — английский математик.

$$s_i = s_{i-1}\xi + a_i,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \qquad (21.14)$$

где $s_0 = a_0$, а s_i — значение выражения, заключенного в i-ю скобку, т. е. $s_i = b_i$. Тогда $P_n(\xi) = s_n$. Рекуррентную формулу (21.14) можно описать следующим компактным алгоритмом.

Шаг 0. Положить $s_0 = a_0$ и $i = 0$.

Шаг 1. Увеличить значение i на единицу.

Шаг 2. Если $i > n$, перейти к шагу 4, если нет — шагу 3.

Шаг 3. Вычислить $s_i = s_{i-1}\xi + a_i$ и перейти к шагу 1.

Шаг 4. Положить $P_n(\xi) = s_n$ и прекратить процесс вычисления.

Заметим, что шаги 1, 2, 3 этого алгоритма повторяются многократно циклически, причем число этих повторений *(циклов)* определяется степенью n многочлена.

Схема приведенного алгоритма изображена на рис. 21.2.

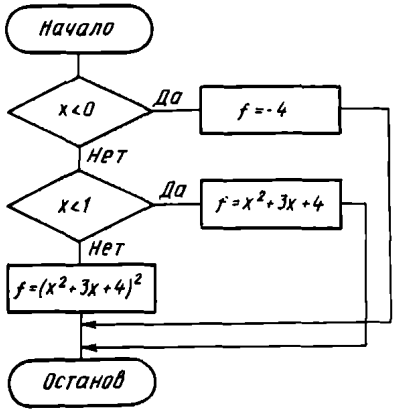


Рис. 21.1

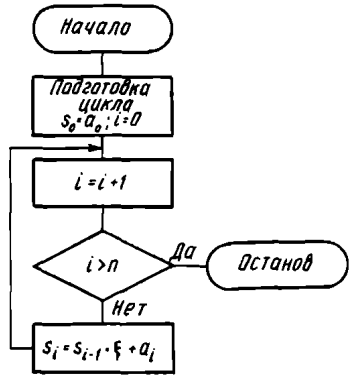


Рис. 21.2

На практике при отсутствии вычислительных средств (микрокалькуляторов) вычисление значения многочлена в соответствии с формулами (21.13) можно осуществить по следующей схеме Горнера:

$+\ a_0$	a_1 $b_0\xi$	a_2 $b_1\xi$	a_3 $b_2\xi$	... ...	a_{n-1} $b_{n-2}\xi$	a_n $b_{n-1}\xi$
$b_0 = a_0$	b_1	b_2	b_3	.. ...	b_{n-1}	$b_n = P_n(\xi)$

ξ

Пример 2. Найти $P_4(3)$ для многочлена

$$P_4(x) = 7{,}54x^4 + 11{,}08x^3 + 3{,}82x^2 + 0{,}44x - 0{,}48.$$

□ Составляем схему Горнера:

+ 7,54	11,08 22,62	3,82 101,10	0,44 314,76	−0,48 945,60
7,54	33,70	104,92	315,20	$945{,}12 = P_4(3)$

Итерационные алгоритмы. Выше приведен пример циклического алгоритма (схема Горнера), в котором число повторений (циклов) конечно и известно заранее. Это число определяется степенью n многочлена $P_n(x)$. Существуют алгоритмы, в которых число циклов неизвестно заранее, а определяется самим алгоритмом по достижении нужной точности вычисления. Такие алгоритмы на каждом шаге цикла позволяют вычислить приближенное значение *(итерацию)* искомого решения задачи. При следующем шаге эта итерация принимается за новое начальное данное. Алгоритмы описанного типа называются *итерационными*.

В качестве примера рассмотрим задачу извлечения квадратного корня $x = \sqrt{a}$ по итерационному *алгоритму Герона**, в соответствии с которым приближенное значение корня определяется равенством

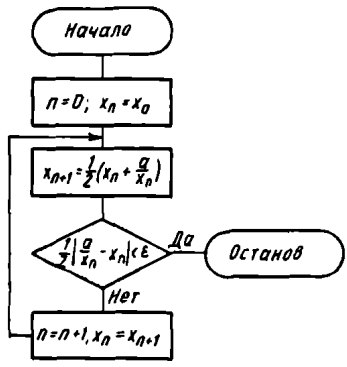


Рис. 21.3

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = x_n + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_n} - x_n\right),$$

$$n = 0,\ 1,\ \ldots$$

Здесь x_0 — некоторое грубое значение корня. Точность ε вычисления определяется неравенством

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|\frac{a}{x_n} - x_n\right| < \varepsilon.$$

Тогда алгоритм вычисления корня можно представить в следующем виде.

Шаг 0. Положить $x_n = x_0$, $n = 0$.

Шаг 1. Вычислить $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$.

Шаг 2. Вычислить $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_n} - x_n\right)$. Если $\frac{1}{2}\left|\frac{a}{x_n} - x_n\right| < \varepsilon$, то перейти к шагу 4, если нет — к шагу 3.

Шаг 3. Увеличить значение n на единицу и положить $x_n = x_{n+1}$. Перейти к шагу 1.

Шаг 4. Прекратить процесс вычисления.

Схема этого алгоритма изображена на рис. 21.3.

---

* Герон Александрийский (I в. до н. э.) — древнегреческий ученый.

Задачи и упражнения

1. Разработать и описать алгоритм вычисления функции

$$F(x, y)=\begin{cases} x, & x \leqslant 0,\ y > x; \\ 1 - x^2/4 - y^2/9, & x > 0,\ y \geqslant 0; \\ 1 + xy, & y < 0,\ y \leqslant x. \end{cases}$$

2. Найти $P_4(3{,}25)$, если $P_4(x) = 3{,}45x^4 - 2{,}91x^3 + 3{,}79x^2 - 6{,}75x - 2{,}38$.

3. Корень уравнения находится по итерационной формуле $x_{n+1} = (2 - x_n^3)/5$. Приняв за начальное приближение корня $x_0 = 1$ и положив точность $\varepsilon = 10^{-5}$, разработать алгоритм этого итерационного процесса.

21.3. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Постановка задачи. Простейшими функциями действительной переменной являются многочлены. Поэтому часто пытаются представить данную функцию $f(x)$ многочленом n-й степени $P_n(x)$, т. е. принимают $P_n(x)$ в качестве приближения (аппроксимации) для $f(x)$. Одним из многочленов, аппроксимирующих функцию $f(x)$, является многочлен Тейлора, для построения которого необходимо знать n производных функции $f(x)$ в точке x_0, что не всегда возможно. Другой путь построения аппроксимирующего многочлена $P_n(x)$ состоит в следующем.

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — различные точки этого отрезка, называемые *узлами*, $a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leqslant b$. Пусть известны значения y_i этой функции в узлах x_i, т. е. $f(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Задача интерполирования функции $f(x)$ на $[a, b]$ состоит в том, чтобы подобрать многочлен

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_kx^{n-k} \quad (21.15)$$

с действительными коэффициентами, принимающий в узлах x_i те же значения y_i, что и функция f, т. е. чтобы выполнялись равенства

$$P_n(x_i) = \sum_{k=0}^{n} a_kx_i^{n-k} = f(x_i) = y_i. \quad (21.16)$$

Такой многочлен $P_n(x)$ называется *интерполяционным*, а точки x_0, x_1, x_2, ..., x_n — узлами интерполяции.

Покажем, что сформулированная таким образом задача аппроксимации всегда разрешима, причем имеется единственный интерполяционный многочлен $P_n(x)$, удовлетворяющий условиям (21.16).

В самом деле, равенства (21.16) представляют собой линейную систему $n + 1$ алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned} &a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x_0 + a_n = y_0; \\ &a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x_1 + a_n = y_1; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_0x_n^n + a_1x_n^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x_n + a_n = y_n \end{aligned}\right\} \quad (21.17)$$

с $n+1$ неизвестными $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Определителем этой системы служит определитель Вандермонда

$$\begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \ldots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \ldots & x_1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \ldots & x_n & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

так как узлы x_i — различные. Следовательно, система (21.17) имеет единственное решение при любых правых частях y_i, т. е. коэффициенты интерполяционного многочлена $P_n(x)$ находятся однозначно.

Интерполяционный многочлен Лагранжа. Для построения *интерполяционного многочлена Лагранжа,* обозначаемого обычно $L_n(x)$, рассмотрим сначала вспомогательный многочлен

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \tag{21.18}$$

$(n+1)$-й степени и многочлен

$$\varphi_i(x) = \frac{\omega(x)}{x - x_i} = (x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n) \tag{21.19}$$

n-й степени.

Нетрудно видеть, что многочлен $\omega(x)$ обращается в нуль в узлах интерполяции x_i, т. е. $\omega(x_i) = 0$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, а многочлен $\varphi_i(x)$ обращается в нуль во всех узлах, кроме узла x_i, т. е.

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 0, & j \neq i; \\ (x_j - x_0)\cdots(x_j - x_{i-1})(x_j - x_{i+1})\cdots(x_j - x_n) \neq 0, & j = i. \end{cases} \tag{21.20}$$

Из равенств (21.19) и (21.20) следует, что многочлен

$$l_j(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_j - x_0)\cdots(x_j - x_{i-1})(x_j - x_{i+1})\cdots(x_j - x_n)} = \\ = \frac{\omega(x)}{(x - x_i)(x_j - x_0)\cdots(x_j - x_{i-1})(x_j - x_{i+1})\cdots(x_j - x_n)} \tag{21.21}$$

принимает нулевые значения во всех узлах, кроме x_j, а в узле x_j его значение равно единице, т. е.

$$l_j(x_i) = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j; \end{cases} \quad i, j = 0, 1, \ldots, n.$$

Тогда многочлен $l_j(x)y_j$ будет принимать нулевые значения во всех узлах, кроме x_j, и значение y_j в узле x_j, т. е.

$$l_j(x_i)y_j = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ y_j, & i = j; \end{cases} \quad i, j = 0, 1, \ldots, n. \tag{21.22}$$

Составим теперь многочлен

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j l_j(x) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} y_j \frac{\omega(x)}{(x-x_j)(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)} \qquad (21.23)$$

n-й степени, где $\omega(x)$ определяется равенством (21.18). Ясно, что $L_n(x_i) = \sum_{j=0}^{n} y_j l_j(x_i) = y_i$, так как при $x = x_i$ от всей суммы в равенстве (21.23) останется одно слагаемое, когда $j = i$, а остальные слагаемые $y_j l_j(x_i)$, когда $j \neq i$, согласно равенству (21.22), равны нулю. Тем самым построен интерполяционный многочлен Лагранжа $L_n(x)$ для функции $f(x)$, удовлетворяющий условиям (21.16).

Заметим, что

$$\omega'(x_j) = \lim_{x\to x_j} \frac{\omega(x)-\omega(x_j)}{x-x_j} = \lim_{x\to x_j} \frac{\omega(x)}{x-x_j} =$$

$$= \lim_{x\to x_j} \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_j)\cdots(x-x_n)}{x-x_j} =$$

$$= (x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n). \qquad (21.24)$$

Поэтому формула (21.23) интерполяционного многочлена Лагранжа может быть записана в более компактном виде:

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \frac{\omega(x)}{(x-x_j)\omega'(x_j)}. \qquad (21.25)$$

Оценка погрешности интерполирования. Пусть $P_n(x)$ — интерполяционный многочлен. Величина

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) \qquad (21.26)$$

называется *погрешностью интерполирования*. Если функция $f(x)$ задана только своими значениями y_i в узлах интерполирования x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, то относительно $P_n(x)$ ничего сказать нельзя. Получим оценку погрешности интерполирования, считая, что $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$, где x_i, $x \in [a, b]$, $x \neq x_i$. Рассмотрим функцию $F(t) = f(t) - P_n(t) - C\omega(t)$, где C выбирается из условия

$$C = \frac{f(x)-P_n(x)}{\omega(x)} = \frac{R_n(x)}{\omega(x)}. \qquad (21.27)$$

Ясно, что $F(x_i) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$, и $F(x) = 0$, т. е. функция $F(t)$ на $[a, b]$ имеет $n+2$ различных нулей. Тогда после повторного применения теоремы Ролля получим, что производная $F^{(n+1)}(t)$ имеет по крайней мере один корень ξ, лежащий в наименьшем интервале, содержащем точки $x_0, x_1, \ldots, x_n, x$, т. е. $F^{(n+1)}(\xi) = 0$. Но $F^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - P_n^{(n+1)}(t) - C\omega^{(n+1)}(t)$, где $P_n^{(n+1)}(t) = 0$, а $\omega^{(n+1)}(t) = (n+1)!$. Поэтому $F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - C(n+1)! = 0$. Тогда с учетом равенства (21.27) получим

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x). \qquad (21.28)$$

Отсюда, если известна верхняя граница $M_{n+1} = \sup_{x\in[a,\,b]} |f^{(n+1)}(x)|$, то

справедлива *равномерная оценка*

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}|\omega(x)|}{(n+1)!}, \quad \forall x \in [a, b]. \tag{21.29}$$

Пример 1. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $f(x) = \sin(\pi x/2)$ по узлам $x_0 = 0$, $x_1 = 1/3$, $x_2 = 1$ и получить равномерную оценку погрешности на $[0, 1]$.

□ Заметим, что $f(x_0) = y_0 = 0$, $f(x_1) = y_1 = 1/2$, $f(x_2) = y_2 = 1$. Далее $\omega(x) = x(x - 1/3)(x - 1) \Rightarrow \omega'(0) = (0 - 1/3)(0 - 1) = 1/3$; $\omega'(1/3) = \frac{1}{3}(1/3 - 1) = -2/9$; $\omega'(1) = 1(1 - 1/3) = 2/3$.

По формуле (21.25) при $n = 2$ имеем

$$L_2(x) = 0\,\frac{(x - 1/3)(x - 1)}{1/3} + \frac{1}{2}\,\frac{x(x - 1)}{-2/9} + 1\,\frac{x(x - 1/3)}{2/3} =$$

$$= -\frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{4}x.$$

Поскольку $|\sin'''(\pi x/2)| = \frac{\pi^3}{8}\left|\cos\frac{\pi x}{2}\right| \leqslant \frac{\pi^3}{8}$, то, согласно неравенству (21.29), получаем следующую оценку погрешности интерполирования: $|R_n(x)| \leqslant$

$$\leqslant \frac{\pi^3}{8 \cdot 6}\,|\omega(x)|, \text{ где } \omega(x) = x\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 1).$$

Для получения равномерной оценки погрешности надо найти $\max\limits_{x \in [0,\ 1]} |\omega(x)|$. Он находится по известным в дифференциальном исчислении функций одной переменной правилам (см. § 3.7, ч. I) и равен 0,079. Таким образом, окончательно имеем равномерную оценку $|R_n(x)| \leqslant \frac{\pi^3}{48} \cdot 0{,}079 \approx 0{,}05$.

Линейная и квадратичная интерполяция. Интерполяция по формуле (21.15) при $n = 1$ называется *линейной,* поскольку в этом случае интерполяционный многочлен $P_1(x) = a_0 x + a_1$ является линейной функцией. При $n = 1$ интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $f(x)$, согласно равенству (21.25), принимает вид

$$L_1(x) = y_0\,\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1\,\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0. \tag{21.30}$$

Геометрически линейная интерполяция функции $f(x)$ означает замену ее графика отрезком прямой линии (21.30), соединяющей точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) (рис. 21.4).

При линейной интерполяции функции $f(x) \in C^2$, согласно равенству (21.28) при $n = 1$, погрешность интерполирования определяется соотношением

$$R_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)(x - x_1). \tag{21.31}$$

Найдем наибольшую возможную погрешность при линейной интерполяции. Обозначим $x - x_0 = h$. Так как для функции $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)$ стационарной точкой является середина отрезка $[x_0, x_1]$, т. е. точка $(x_0 + x_1)/2$, то $\max\limits_{x \in [x_0,\ x_1]} |\omega(x)| = \max\limits_{x \in [x_0,\ x_1]} |(x - x_0)(x - x_1)| =$

$= \frac{h^2}{4}$. Следовательно, согласно формуле (21.31),

$$|R_1(x)| \leqslant \frac{M_2}{8} h^2, \tag{21.32}$$

где $M_2 = \max\limits_{x \in [x_0,\ x_1]} |f''(x)|$.

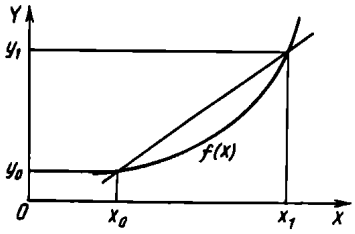


Рис. 21.4

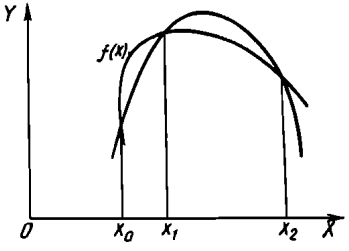


Рис. 21.5

Пример 2. Дана пятизначная таблица функции $f(x) = \lg x$ для $x \in [1,\ 10]$ с расстоянием между узлами $h = 10^{-3}$. Будет ли погрешность интерполирования при линейной интерполяции меньше, чем $5 \cdot 10^{-5}$?

□ Так как для любого x, лежащего между двумя узлами x_0 и x интерполяции, справедливы неравенства $|x - x_0| \leqslant h$, $|x - x_1| \leqslant h$ и $f'' = -\lg e/x^2$, а $M_2 = \max\limits_{x \in [1,\ 10]} |f''(x)| = \lg e \approx 0{,}4343$, то, согласно неравенству (21.31), имеем $(R_1(x)| \leqslant \frac{h^2}{8} \lg e < 6 \cdot 10^{-8}$, $\forall x \in [1,\ 10]$. Значит, погрешность интерполирования на $[1,\ 10]$ всюду меньше, чем $5 \cdot 10^{-5}$.

Интерполяция по формуле (21.15) при $n = 2$ называется *квадратичной,* поскольку для этого случая интерполяционный многочлен $P_2(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$ есть квадратный трехчлен. Геометрически квадратичная интерполяция функции $f(x)$ с узлами x_0, x_1 и x_2 означает замену ее графика параболической кривой, проходящей через точки $(x_0,\ y_0)$, $(x_1,\ y_1)$ и $(x_2,\ y_2)$ (рис. 21.5).

Согласно формуле (21.25), при $n = 2$ интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $f(x)$ имеет вид

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \\ + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}. \tag{21.33}$$

Погрешность квадратичной интерполяции для функции $f(x) \in C^{(3)}$, согласно равенству (21.28), определяется соотношением

$$R_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{6}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2). \tag{21.34}$$

Интерполирование по равноотстоящим узлам. Интерполяционный многочлен Лагранжа упрощается, если узлы интерполяции равноотстоящие, т. е. величина $h = x_{i+1} - x_i$, называемая *шагом ин-*

терполирования, постоянная. В этом случае узел $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Обозначим $(x - x_0)/h = t$. Тогда

$$x - x_i = x_0 + th - x_0 - ih = (t - i)h. \tag{21.35}$$

Подставив разности (21.35) в равенство (21.18), получим

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) = \\ = th(t-1)h\cdots(t-n)h = t(t-1)\cdots(t-n)h^{n+1}. \tag{21.36}$$

Далее, так как $x_j - x_i = (x_0 + jh) - (x_0 + ih) = (j - i)h$, то, согласно равенству (21.24),

$$\omega'(x_j) = jh(j-1)h\cdots(j-j+1)h(j-j-1)h\cdots(j-n)h = \\ = h^n j(j-1)\cdots 2\cdot 1(-1)(-2)\cdots(-1)(n-j) = \\ = h^n j!(-1)^{n-j}(n-j)!. \tag{21.37}$$

С учетом формул (21.35) — (21.37) из равенства (21.25) получим

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \frac{t(t-1)\cdots(t-n)h^{n+1}}{(t-j)h\cdot h^n j!(-1)^{n-j}(n-j)!}$$

или

$$L_n(x) = L_n(x_0 + ht) = \\ = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{n-j}y_j}{j!(n-j)!} t(t-1)\cdots(t-j+1)(t-j-1)\cdots \\ \cdots(t-n). \tag{21.38}$$

Для погрешности $R_n(x)$ интерполяции из равенства (21.36) в этом случае получаем

$$R_n(x) = R_n(x_0 + th) = h^{n+1}t(t-1)\cdots(t-n)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}. \tag{21.39}$$

Для равномерной же оценки погрешности, согласно соотношению (21.20), имеем оценку

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} h^{n+1}|t(t-1)\cdots(t-n)|. \tag{21.40}$$

Напомним, что в формулах (21.38) — (21.40) $t = (x - x_0)/h$.

Пример 3. Построить интерполяционный полином Лагранжа для функции $f(x) = \sin x$ по значениям $\sin(0) = 0$, $\sin(\pi/4) = 0{,}707$, $\sin(\pi/2) = 1$ и определить его значение в точке $x = \pi/6$. Оценить погрешность.

□ Здесь $x_0 = 0$, шаг $h = \pi/4$. Находим $t = \dfrac{x - x_0}{h} = \dfrac{\pi/6}{\pi/4} = \dfrac{2}{3}$. Подставив $t = 2/3$ и $y_0 = 0$, $y_1 = 0{,}707$, $y_2 = 1$ в формулу (21.38) при $n = 2$, получим

$$L_2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{(-1)^2 y_0}{0!2!}(t-1)(t-2) + \frac{(-1)^1 y_1}{1!1!} t(t-2) + \frac{(-1)^0 y_2}{2!0!} t(t-1) = \\ = -0{,}707\cdot\frac{2}{3}\left(-\frac{4}{3}\right) + \frac{1}{2}\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right) = 0{,}517.$$

Для оценки равномерной погрешности воспользуемся формулой (21.40). Так как $t = 2/3$, $M_3 = \max\limits_{x \in [0,\ \pi/2]} |\sin'''(x)| = 1$, $x = \pi/6$, то

$$|R_2(x)| \leqslant \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 \frac{2}{3}\,\frac{1}{3}\,\frac{4}{3} = 0{,}024.$$

Приближение функции методом наименьших квадратов. Интерполяционный многочлен $P_n(x)$ приближенно заменяет функцию $f(x)$ на $[a, b]$, причем значения $f(x)$ в $n+1$ узлах x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, совпадают со значениями многочлена $P_n(x)$ степени n в этих узлах. На практике часто бывает, что степень m многочлена $P_m(x)$ значительно меньше числа $n+1$ узлов, и поэтому построение такого аппроксимирующего интерполяционного многочлена становится невозможным. Тем самым аппроксимирование функций является более общим понятием, чем интерполирование. Выбор аппроксимирующего многочлена $P_m(x)$ для данной функции $f(x)$ зависит от способа (меры) оценки погрешности. На практике одной из наиболее употребительных является оценка погрешности, минимизирующая сумму квадратов отклонений значений функции $y_i = f(x_i)$ от значений $P_m(x_i)$ аппроксимирующего многочлена в узлах аппроксимации x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. Такая оценка называется *оценкой по методу наименьших квадратов*. Итак, при построении аппроксимирующего многочлена

$$P_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m \qquad (21.41)$$

для функции $f(x)$ по методу наименьших квадратов требуется так подобрать его коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m$, $m < n$, чтобы величина

$$S = S(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=0}^{n} (P_m(x_i) - f(x_i))^2$$

была возможно наименьшей. В частном случае, когда $m = 1$, эта задача решена в § 6.8, ч. II. В общем случае поступаем аналогично.

Найдем частные производные по a_i функции

$$S = \sum_{i=0}^{n} (a_0 x_i^m + a_1 x_i^{m-1} + \ldots + a_m - y_i)^2, \quad y_i = f(x_i) \qquad (21.42)$$

и приравняем их нулю. Получим систему $m+1$ уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum_{i=0}^{n} (a_0 x_i^m + a_1 x_i^{m-1} + \ldots + a_m - y_i) x_i^m = 0;\\
&\frac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum_{i=0}^{n} (a_0 x_i^m + a_1 x_i^{m-1} + \ldots + a_m - y_i) x_i^{m-1} = 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial S}{\partial a_{m-1}} = 2\sum_{i=0}^{N} (a_0 x_i^m + a_1 x_i^{m-1} + \ldots + a_m - y_i) x_i = 0;\\
&\frac{\partial S}{\partial a_m} = 2\sum_{i=0}^{n} (a_0 x_i^m + a_1 x_i^{m-1} + \ldots + a_m - y_i) 1 = 0
\end{aligned}\right\}$$

с $m+1$ неизвестными a_0, a_1, ..., a_{m-1}, a_m. Перепишем ее в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\Big(\sum_{i=0}^{n} x_i^{2m}\Big)a_0+\Big(\sum_{i=0}^{n} x_i^{2m-1}\Big)a_1+\ldots+\Big(\sum_{i=0}^{n} x_i^{m}\Big)a_m=\sum_{i=0}^{n} x_i^m y_i;\\
&\Big(\sum_{i=0}^{n} x_i^{2m-1}\Big)a_0+\Big(\sum_{i=0}^{n} x_i^{2m-2}\Big)a_1+\ldots+\Big(\sum_{i=0}^{n} x_i^{m-1}\Big)a_m=\sum_{i=0}^{n} x_i^{m-1}y_i;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Big(\sum_{i=0}^{n} x_i^{m+1}\Big)a_0+\Big(\sum_{i=0}^{n} x_i^{m}\Big)a_i+\ldots+\Big(\sum_{i=0}^{n} x_i\Big)a_m=\sum_{i=0}^{n} x_i y_i;\\
&\Big(\sum_{i=0}^{n} x_i^{m}\Big)a_0+\Big(\sum_{i=0}^{n} x_i^{m-1}\Big)a_1+\ldots+(n+1)a_m=\sum_{i=0}^{n} y_i.
\end{aligned}\right\}\quad(21.43)$$

Система (21.43) называется *нормальной системой метода наименьших квадратов*. Можно доказать, что если среди узлов x_0, x_1, ..., x_n нет совпадающих и $m \leqslant n$, то система (21.43) имеет единственное решение $a_0=\hat{a}_0$, $a_1=\hat{a}_1$, ..., $a_m=\hat{a}_m$. Числа $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$, ..., $\hat{a}_m$ и доставляют минимум функции (21.42), т. е. аппроксимирующий многочлен (21.41), минимизирующий функцию S, имеет вид

$$P_m(x)=\hat{a}_0x^m+\hat{a}_1x^{m-1}+\ldots+\hat{a}_{m-1}x+\hat{a}_m.$$

Если $m=n$, то в силу единственности интерполяционного многочлена получаем, что $P_n(x)=L_n(x)$, где $L_n(x)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа.

Заметим, что коэффициентами системы (21.43) являются суммы степеней чисел x_i, а правыми частями — суммы произведений y_i и степеней x_i. Поэтому при решении системы предварительно находят величины $\sum\limits_{i=0}^{n} x_i$, $\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2$, ..., $\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^{2m}$, $\sum\limits_{i=0}^{n} x_i y_i$, $\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 y_i$, ..., $\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^m y_i$, которые затем подставляют в систему (21.43).

Пример 4. Методом наименьших квадратов подобрать аппроксимирующий многочлен второй степени $P_2(x)=a_0x^2+a_1x+a_2$ для данных, приведенных в следующей таблице:

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	−1,00	−0,60	−0,40	−0,20	0,20	0,40	0,60	0,80
y_i	−0,50	−0,10	0,20	0,66	1,40	1,90	2,30	2,92

□ Система (21.43) в нашем случае имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\Big(\sum_{i=0}^{7} x_i^4\Big)a_0+\Big(\sum_{i=0}^{7} x_i^3\Big)a_1+\Big(\sum_{i=0}^{7} x_i^2\Big)a_2=\sum_{i=0}^{7} x_i^2y_i;\\
&\Big(\sum_{i=0}^{7} x_i^3\Big)a_0+\Big(\sum_{i=0}^{7} x_i^2\Big)a_1+\Big(\sum_{i=0}^{7} x_i\Big)a_2=\sum_{i=0}^{7} x_iy_i;\\
&\Big(\sum_{i=0}^{7} x_i^2\Big)a_0+\Big(\sum_{i=0}^{7} x_i\Big)a_i+8a_2=\sum_{i=0}^{7} y_i.
\end{aligned}\right\}\quad(21.44)$$

Вычислять коэффициенты системы (21.44) удобно с помощью таблицы:

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	x_iy_i	$x_i^2y_i$
0	−1,00	−0,50	1,00	−1,000	1,000	0,500	−0,500
1	−0,60	−0,10	0,36	−0,216	0,130	0,060	−0,036
2	−0,40	0,20	0,16	−0,064	0,026	−0,080	0,032
3	−0,20	0,66	0,04	−0,008	0,002	−0,132	0,026
4	0,20	1,40	0,04	0,008	0,002	0,280	0,056
5	0,40	1,90	0,16	0,064	0,026	0,760	0,304
6	0,60	2,30	0,36	0,216	0,130	1,380	0,828
7	0,80	2,92	0,64	0,512	0,410	2,336	1,869
	$\sum_i x_i = -0,20$	$\sum_i y_i = 8,78$	$\sum_i x_i^2 = 2,76$	$\sum_i x_i^3 = -0,488$	$\sum_i x_i^4 = 1,726$	$\sum_i x_iy_i = 5,104$	$\sum_i x_i^2y_i = 2,579$

Полученные коэффициенты подставляем в систему (21.44), предварительно округлив их до двух знаков после запятой:

$$\left.\begin{aligned} 1,73a_0 - 0,49a_1 + 2,76a_2 &= 2,58;\\ -0,49a_0 + 2,76a_1 - 0,20a_2 &= 5,10;\\ 2,76a_0 - 0,20a_1 + 8,00a_2 &= 8,78. \end{aligned}\right\} \qquad (21.45)$$

Решением этой системы, найденным по методу Гаусса (см. § 21.4, пример 1), является $\hat{a}_0 = 0,51$, $\hat{a}_1 = 2,01$, $\hat{a}_2 = 0,97$. Таким образом, искомый аппроксимирующий многочлен имеет вид $P_2(x) = 0,51x^2 + 2,01x + 0,97$.

Задачи и упражнения

1. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $f(x) = e^{-x}$ по узлам интерполирования $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Оценить погрешность при $x = 1,5$.

2. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа по данным таблицы

x_i	−2	−1	2	3
y_i	−12	−8	3	5

3. Подобрать аппроксимирующий многочлен второй степени по данным таблицы

i	0	1	2	3	4
x_i	0,78	1,56	2,34	3,12	3,81
y_i	2,50	1,20	1,12	2,25	4,28

21.4. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ГАУССА

Схема метода Гаусса. Одной из наиболее часто встречающихся на практике является задача отыскания решения системы n линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}\right\} \qquad (21.46)$$

с n неизвестными x_1, x_2, ..., x_n. Применяемые в настоящее время методы решения систем вида (21.46) можно разделить на две группы: точные и приближенные. К точным относятся такие методы, которые в предположении, что вычисления ведутся без округлений, позволяют получить точные значения неизвестных. К приближенным относятся методы, которые даже в предположении, что вычисления ведутся без округлений, позволяют получить решение системы лишь с заданной точностью.

Если определитель $|A|$ системы (21.46) отличен от нуля, то ее точное решение можно найти по правилу Крамера (см. формулу (1.186), ч. I): $x_j = D_j/|A|$, $j = 1, 2, \ldots, n$, где D_j — определитель, полученный из определителя $|A|$ заменой j-го столбца столбцом свободных членов. Основным недостатком правила Крамера является большой объем вычислений: требуется вычислить $n+1$ определителей порядка n. Каждый такой определитель состоит из суммы $n!$ членов, являющихся произведением n элементов определителя. Например, при $n = 20$ требуется вычислить $2{,}4329 \cdot 10^{18}$ членов определителя. Если на вычисление одного члена тратится 1 мкс, то для вычисления только одного определителя 20-го порядка потребуется около 10^5 лет! Поэтому при решении линейных систем уравнений на ЭВМ используют либо метод последовательных исключений Гаусса, либо интерполяционные методы.

Основная идея метода Гаусса (см. § 1.15, ч. I) состоит в том, что система (21.46) приводится к эквивалентной ей системе с треугольной матрицей (прямой ход исключения). Из полученной системы последовательно, начиная с последнего уравнения, находятся неизвестные x_n, x_{n-1}, ..., x_2, x_1 (обратный ход исключения). Проиллюстрируем схему этого метода на примере системы трех уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2 и x_3:

$$A:\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = \alpha_1 & (A_1); \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = \alpha_2 & (A_2); \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \alpha_3 & (A_3) \end{cases} \qquad (21.47)$$

(здесь A_i означает i-е уравнение системы A). Будем считать, что $a_{11} \neq 0$. В результате элементарных преобразований из системы (21.47) получаем эквивалентную систему

$$B:\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 = \beta_1 & (B_1); \\ b_{22}x_2 + b_{23}x_3 = \beta_2 & (B_2); \\ b_{32}x_2 + b_{33}x_3 = \beta_3 & (B_3), \end{cases} \qquad (21.48)$$

где $B_1 = A_1/a_{11}$, т. е. уравнение B_1 получено делением уравнения A_1 на a_{11}; $B_2 = A_2 - a_{21}B_1$, т. е. уравнение B_2 получено из уравнения A_2 вычитанием уравнения B_1, умноженного на a_{21}; $B_3 = A_3 - a_{31}B_1$ — уравнение B_3 — получается из уравнения A_3 вычитанием уравнения B_1, умноженного на a_{31}.

Систему (21.48) элементарными преобразованиями приведем к эквивалентной системе ($b_{22} \neq 0$)

$$C:\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 = \beta_1 \quad (C_1); \\ x_2 + c_{23}x_3 = \gamma_2 \quad (C_2); \\ c_{33}x_3 = \gamma_3 \quad (C_3), \end{cases} \tag{21.49}$$

где $C_1 = B_1$; $C_2 = \frac{1}{b_{22}}B_2$; $C_3 = B_3 - b_{32}B_2$. Разделив уравнение C_3 на $c_{33} \neq 0$, из системы (21.49) получим систему

$$D:\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 = \beta_1 \quad (D_1); \\ x_2 + c_{23}x_3 = \gamma_2 \quad (D_2); \\ x_3 = \delta_3 \quad (D_3), \end{cases} \tag{21.50}$$

где $D_1 = C_1$, $D_2 = C_2$, $D_3 = \frac{1}{c_{33}}C_3$. Из системы (21.50) неизвестные x_1, x_2, x_3 находятся обратным ходом по формулам:

$$\left.\begin{array}{l} x_3 = \delta_3; \\ x_2 = \gamma_2 - c_{23}x_3; \\ x_1 = \beta_1 - b_{12}x_2 - b_{13}x_3. \end{array}\right\} \tag{21.51}$$

Решение системы (21.48) по методу Гаусса при ручном счете обычно представляется в виде табл. 21.1. Предпоследний столбец этой таблицы введен для контроля вычислений. Каждое число a_i в нем равно сумме коэффициентов i-го уравнения системы A, взятой с обратным знаком, $i = 1, 2, 3$. Тогда сумма элементов каждой строки таблицы для системы A равна нулю. В процессе исключения неизвестных над элементами предпоследнего столбца производим те же действия, что и над элементами соответствующих строк. Ясно, что при этом сумма всех элементов каждой строки таблицы для систем B, C и D должна оставаться равной нулю. Если вычисления ведутся с округлением, возможны отклонения суммы элементов по строкам от нуля в системах B, C и D в пределах ошибок округлений. Тогда наличие большого отклонения будет свидетельствовать о грубой ошибке в вычислениях.

Неизвестные x_1, x_2, x_3 находят по формулам (21.51), а $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$ — по тем же формулам, в которых β_1, γ_2, δ_1 заменены d_1, d_2, d_3 соответственно. Тогда при отсутствии ошибок округлений сумма элементов в последних трех строках табл. 21.1 должна быть также равна нулю, т. е. $1 + x_i + \bar{x}_i = 0$, $i = 1, 2, 3$.

Таблица 21.1

Система	Условные обозначения уравнений и действий	Коэффициенты системы			Свободный член	Контрольная сумма	Сумма строки
A	A_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	α_1	$-(a_{11}+a_{12}+a_{13}+\alpha_1)=a_1$	0
	A_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	α_2	$-(a_{21}+a_{22}+a_{23}+\alpha_2)=a_2$	0
	A_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	α_3	$-(a_{31}+a_{32}+a_{33}+\alpha_3)=a_3$	0
B	$B_1=\frac{1}{a_{11}}A_1$	1	b_{12}	b_{13}	β_1	$b_1=a_1/a_{11}$	≈ 0
	$B_2=A_2-a_{21}B_1$	0	b_{22}	b_{23}	β_2	$b_2=a_2-a_{21}b_1$	≈ 0
	$B_3=A_3-a_{31}B_1$	0	b_{32}	b_{33}	β_3	$b_3=a_3-a_{31}b_1$	≈ 0
C	$C_1=B_1$	1	b_{12}	b_{13}	β_1	$c_1=b_1$	≈ 0
	$C_2=\frac{1}{b_{22}}B_2$	0	1	c_{23}	γ_2	$c_2=b_2/b_{22}$	≈ 0
	$C_3=B_3-b_{32}C_2$	0	0	c_{33}	γ_3	$c_3=b_3-b_{32}b_2$	≈ 0
D	$D_1=C_1$	1	b_{12}	b_{13}	β_1	$d_1=c_1$	≈ 0
	$D_2=C_2$	0	1	c_{23}	γ_2	$d_2=c_2$	≈ 0
	$D_3=\frac{1}{c_{33}}C_3$	0	0	1	δ_3	$d_3=\frac{1}{c_{33}}c_3$	≈ 0
				1	x_3	$\bar{x}_3$	≈ 0
			1		x_2	$\bar{x}_2$	≈ 0
		1			x_3	$\bar{x}_1$	≈ 0

Пример 1. Методом Гаусса решить систему (21.45).

□ Все вычисления будем вести с двумя запасными десятичными знаками по сравнению с числом десятичных знаков у коэффициентов системы. Согласно табл. 21.1, по формулам (21.51) получим: $x_3=0{,}9719$ $(\bar{x}_3=d_3=-1{,}9719)$, $x_2=2{,}2244-0{,}2219\cdot 0{,}9719=2{,}0087$ $(\bar{x}_2=d_2-c_{23}d_3=-3{,}4464+0{,}2219\cdot 1{,}9719=-3{,}0088)$, $x_1=1{,}4913+0{,}2832\cdot 2{,}0087-1{,}5954\cdot 0{,}9719=0{,}5094$. $(\bar{x}_1=d_1-b_{12}\bar{x}_2-b_{13}\bar{x}_3=$ $=-3{,}8035-0{,}2832\cdot 3{,}0088+1{,}5954\cdot 1{,}9719=-1{,}5096)$.

Все вычисления сведем в табл. 21.2.

Таблица 21.2

Система	Условные обозначения уравнений и действий	Коэффициенты системы			Свободный член	Контрольная сумма	Сумма строки
A	A_1	1,73	−0,49	2,76	2,58	−6,58	0
	A_2	−0,49	2,76	−0,20	5,10	−7,17	0
	A_3	2,76	−0,20	8,00	8,78	−19,34	0
B	$B_1 = \frac{1}{1,73} A_1$	1	−0,2832	1,5954	1,4913	−3,8035	0
	$B_2 = A_2 + 0,49B_1$	0	2,6212	0,5817	5,8307	−9,0337	−0,0001
	$B_3 = A_3 - 2,76B_1$	0	0,5816	3,5967	4,6640	−8,8423	−0,0004
C	$C_1 = B_1$	1	−0,2832	1,5954	1,4913	−3,8035	0
	$C_2 = \frac{1}{2,6212} B_2$	0	1	0,2219	2,2244	−3,4464	−0,00009
	$C_3 = B_3 - 0,5816C_2$	0	0	3,4676	3,3703	−6,8379	0,00003
D	$D_1 = C_1$	1	−0,2832	1,5954	1,4913	−3,8035	0
	$D_2 = C_2$	0	1	0,2219	2,2244	−3,4464	−0,00009
	$D_3 = \frac{1}{3,4676} C_3$	0	0	1	0,9719	−1,9719	0
				1	0,9719	−1,9719	0
			1		2,0087	−3,0088	−0,0001
		1			0,5094	−1,5096	−0,0008

Заметим, что сумма элементов каждой строки табл. 21.2, включая элемент контрольного столбца, отлична от нуля не более чем на единицу четвертого разряда после запятой, т. е. абсолютная погрешность вычислений в данном примере $\Delta \leqslant \leqslant 2 \cdot 10^{-4}$, что вполне допустимо. Округлив найденное решение системы до двух знаков после запятой, получим окончательно $\hat{x}_1 = 0,51$, $\hat{x}_2 = 2,01$, $\hat{x}_3 = 0,97$.

Схема Гаусса с выбором главного элемента. В рассмотренной выше схеме Гаусса так называемым ведущим или главным элементом системы был элемент $a_{11} \neq 0$. С помощью этого элемента элементарными преобразованиями система A была преобразована в систему B, первый столбец матрицы которой имеет вид $(1, 0, \ldots, 0)^T$. В системе B рассматриваем подсистему $n - 1$ уравнений, начиная со второго. В этой подсистеме в качестве главного выбирается элемент $b_{22} \neq 0$ и элементарными преобразованиями подсистема сводится к новой системе, первый столбец матрицы которой имеет вид

$\underbrace{(1, 0, \ldots, 0)}_{n-1}^{T}$. Продолжив этот процесс, на n-м шаге (в нашем примере на 3-м) приходим к уравнению с одним неизвестным. Объединение всех этих шагов (этапов) дает нам окончательную систему с верхней треугольной матрицей, на главной диагонали которой расположены единицы.

Описанный выше алгоритм (схема Гаусса) является частным случаем более общей схемы этого метода, называемой *схемой Гаусса с выбором главного элемента*. Согласно этой схеме, в качестве главного элемента на каждом этапе выбирается максимальный по модулю элемент a_{ij}. Строка i, в которой он находится, называется *главной*. Элементарными преобразованиями j-й столбец приводится к виду $\underbrace{(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)}_{n}^{T}$ (1 находится в j-й позиции). Исключив i-ю строку, рассмотрим новую систему из $n-1$ уравнений. В этой системе находим главный (максимальный по модулю) коэффициент b_{pq}, с помощью которого элементарными преобразованиями q-й столбец приводим к виду $\underbrace{(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)}_{n-1}^{T}$ (1 находится в q-й позиции). Из полученной таким образом системы исключаем p-е уравнение (p-ю главную строку) и получаем систему из $n-2$ уравнений. Продолжив этот процесс, на n-м шаге приходим к уравнению с одним неизвестным. Объединив это уравнение и уравнения, отвечающие исключенным главным строкам, получим систему n-го порядка, из которой последовательно обратным ходом находятся неизвестные

Пример 2. Методом главных элементов решить систему

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5; \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 &= -3; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11. \end{aligned}\right\} \tag{21.52}$$

□ Составляем расширенную матрицу системы (матрица A системы в ней выделена):

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & \boxed{5} & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \end{array}\right].$$

Главным элементом матрицы A является число $a_{22} = 5$ (выделено прямоугольником). Разделим вторую строку матрицы $\bar{A}$ на 5, получим *главную строку* (2/5, 1, 1/5, —3/5). Далее произведем простые преобразования:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2/5 & 1 & 1/5 & -3/5 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \end{array}\right] \begin{array}{l} \boxed{-2 \cdot II} \\ \\ \boxed{-II} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 11/5 & 0 & 3/5 & 31/5 \\ 2/5 & 1 & 1/5 & -3/5 \\ 8/5 & 0 & 14/5 & 58/5 \end{array}\right] = \bar{B}.$$

Здесь символ $\boxed{\pm\alpha \cdot II}$ означает, что к данной строке нужно прибавить (из данной строки вычесть) вторую строку, умноженную на α. Затем из матрицы $\bar{B}$ удаляем вторую строку, отвечающую уравнению

$$\frac{2}{5}x_1 + x_2 + \frac{1}{5}x_3 = -\frac{3}{5}. \tag{21.53}$$

При этом получаем матрицу

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 11/5 & 0 & 3/5 & 31/5 \\ 8/5 & 0 & \boxed{14/5} & 58/5 \end{array}\right]$$

с ведущим элементом 14/5. Разделив на 14/5 вторую строку матрицы, получим новую матрицу

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 11/5 & 0 & 3/5 & 31/5 \\ 4/7 & 0 & 1 & 29/7 \end{array}\right] \boxed{-3/5 \cdot \text{II}} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 13/7 & 0 & 0 & 26/7 \\ 4/7 & 0 & 1 & 29/7 \end{array}\right] = \bar{C}.$$

Из матрицы $\bar{C}$ удалим вторую (главную) строку, отвечающую уравнению

$$\frac{4}{7}x_1 + x_3 = \frac{29}{7}. \tag{21.54}$$

При этом останется матрица [13/7 0 0 | 26/7], отвечающая уравнению

$$\frac{13}{7}x_1 = \frac{26}{7} \tag{21.55}$$

с одним неизвестным. Объединив уравнения (21.53) — (21.55), придем к системе, отвечающей *главным строкам:*

$$\left.\begin{array}{r} \frac{2}{5}x_1 + x_2 + \frac{1}{5}x_3 = -3; \\ \frac{4}{7}x_1 + x_3 = \frac{29}{7}; \\ \frac{13}{7}x_1 = \frac{26}{7}; \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = -2; \\ x_3 = 3; \\ x_1 = 2. \end{array}\right.$$

Замечания. 1. Все описанные вычисления по схеме Гаусса с выбором главного элемента можно расположить по таблице, аналогичной табл. 21.1.

2. Смысл выбора главного элемента состоит в том, чтобы сделать элементы ведущих строк промежуточных матриц наименьшими и тем самым уменьшить погрешность вычислений.

Задачи и упражнения

1. Методом Гаусса решить систему уравнений

$$\left.\begin{array}{r} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 3; \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 6; \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 4; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7. \end{array}\right\}$$

2. Систему

$$\left.\begin{array}{r} 0{,}15x_1 + 2{,}11x_2 + 30{,}75x_3 = -26{,}38; \\ 0{,}64x_1 + 1{,}21x_2 + 2{,}05x_3 = 1{,}01; \\ 3{,}21x_1 + 1{,}53x_2 + 1{,}04x_3 = 5{,}23 \end{array}\right\}$$

решить методом Гаусса с выбором главного элемента, производя все вычисления с пятью значащими цифрами. Сравнить полученное решение с точными значениями $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$.

21.5. ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Отделение корней. Часто нужно найти корень уравнения $f(x) = 0$ с заданной точностью. Это означает, что если ξ — точное значение корня, а $\hat{x}$ — его приближенное значение с точностью ε, то $|\hat{x} - \xi| \leqslant \varepsilon$.

Нахождение приближенных корней уравнения включает два этапа: 1) отделение корней; 2) уточнение корней до заданной точности.

Отделить корень ξ уравнения $f(x)=0$ — значит указать окрестность точки ξ, не содержащую других корней этого уравнения.

При отделении корней уравнения $f(x)=0$ полезным является следствие из теоремы 2.14, ч. I: если непрерывная функция $f(x)$ на концах отрезка $[a, b]$ принимает значения разных знаков, т. е. $f(a)f(b)<0$, то внутри этого отрезка существует по крайней мере один корень ξ уравнения $f(x)=0$ (рис. 21.6, *а*). При этом корень ξ будет единственным, если $f'(x)$ сохраняет знак внутри интервала (a, b) (рис. 21.6, *б, в*). На практике отделение корней уравнения $f(x)=0$

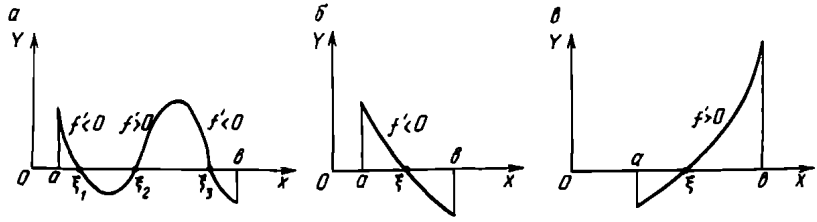


Рис. 21.6

на $[a, b]$ начинается с проверки условия $f(a)f(b)<0$. Если это условие выполнено, то, следовательно, на (a, b) имеется корень уравнения, и дальнейшая задача состоит в выяснении его единственности или неединственности. Для отделения корней практически достаточно провести *процесс половинного деления,* в соответствии с которым отрезок $[a, b]$ делится на 2, 4, 8, ... равных частей и определяются знаки функции в точках деления. При этом если в точках x_k, x_{k+1} деления выполнено условие $f(x_k)f(x_{k+1})<0$, то на (x_k, x_{k+1}) имеется корень уравнения.

Известно, что многочлен n-й степени $P_n(x)$ с действительными коэффициентами имеет не более n действительных корней. Поэтому если для многочлена $P_n(x)$ найдено $n+1$ перемен знака, то тем самым все корни уравнения $P_n(x)=0$ отделены.

Согласно вышеизложенному, получается следующий алгоритм отделения корней уравнения $f(x)=0$:

1) находим участки возрастания и убывания функции $f(x)$ (с помощью $f'(x)$);

2) составляем таблицу знаков функции $f(x)$ в стационарных точках (или ближайших к ним), а также в граничных точках области определения;

3) определяем интервалы, на концах которых $f(x)$ имеет противоположные знаки. Внутри таких интервалов содержится только по одному корню.

Пусть ξ — точное, а $\hat{x}$ — приближенное значения корня уравнения $f(x)=0$, $\xi, \hat{x}\in[a, b]$. Кроме того, пусть $|f'(x)|\geqslant m>0$. К функции $f(x)$ применим теорему Лагранжа на отрезке $[\xi, \hat{x}]$: $f(\hat{x})-f(\xi)=f'(c)(\hat{x}-\xi)$, $c\in(\hat{x}, \xi)$. Отсюда, так как $f(\xi)=0$ и $|f'(c)|\geqslant m$, получим $|f(\hat{x})|\geqslant m|\hat{x}-\xi|$, т. е.

$$|\hat{x}-\xi|\leqslant\frac{|f(\hat{x})|}{m}. \tag{21.56}$$

Формула (21.56) дает оценку погрешности приближенного корня на отрезке $[a, b]$.

Пример 1. Методом половинного деления уточнить до $\varepsilon = 10^{-3}$ меньший корень уравнения $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$.

□ Сначала отделим корни. Находим $f'(x) = (x^3 + 3x^2 - 3)' = 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = -2$. Составляем таблицу:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
sign $f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Напомним, что $\operatorname{sign} f(x) = \begin{cases} +1, & f(x) > 0; \\ -1, & f(x) < 0. \end{cases}$ Так как $f(-\infty) < 0$, $f(-2) > 0$, то первый корень уравнения содержится в интервале $(-\infty, -2)$. Поскольку $f(-3) < 0$, то приближенно значение одного из корней находится в интервале $(-3, -2)$. Второй корень находится в $(-2, 0)$ и, более того, в $(-2, -1)$, так как $f(-2) > 0$, а $f(-1) = -1 < 0$. Третий корень находится в интервале $(0, +\infty)$, ибо $f(0) < 0$, а $f(+\infty) > 0$. Поскольку $f(1) = 1 > 0$, то ясно, что третий корень находится в интервале $(0, 1)$.

Итак, меньший корень ξ находится в интервале $(-3, -2) = (a_0, b_0)$. Уточним этот корень с помощью метода половинного деления. Серединой интервала $(-3, -2)$ служит точка $x_0 = -2{,}5$. Имеем $f(-3) < 0$, $f(-2{,}5) = 0{,}125 > 0 \Rightarrow \xi \in (-3; -2{,}5) =$ $= (a_1, b_1)$. Серединой интервала $(-3; -2{,}5)$ является точка $x_1 = -2{,}75$. Так как $f(-2{,}75) = -1{,}111 < 0$, $f(-2{,}5) > 0$, то $\xi \in (-2{,}75; -2{,}5) = (a_2, b_2)$. Для середины $x_2 = -2{,}625$ интервала $(-2{,}75; -2{,}5)$ имеем $f(-2{,}625) = -0{,}320 < 0$, $f(-2{,}5) > 0$, т. е. $\xi \in (-2{,}625; -2{,}5) = (a_3, b_3)$. Остальные вычисления сведем в таблицу. Знаки «$-$» и «$+$» в верхних индексах a_n и b_n означают, что $f(a_n) < 0$ и $f(b_n) > 0$ соответственно.

n	a_n^-	b_n^+	$\frac{a_n + b_n}{2} = x_n$	$f(x_n)$
0	-3	-2	$-2{,}500$	0,125
1	-3	$-2{,}500$	$-2{,}750$	$-1{,}111$
2	$-2{,}750$	$-2{,}500$	$-2{,}625$	$-0{,}320$
3	$-2{,}625$	$-2{,}500$	$-2{,}563$	$-0{,}139$
4	$-2{,}563$	$-2{,}500$	$-2{,}532$	$-0{,}003$
5	$-2{,}563$	$-2{,}532$	$-2{,}548$	$-0{,}071$
6	$-2{,}548$	$-2{,}532$	$-2{,}540$	$-0{,}034$
7	$-2{,}540$	$-2{,}532$	$-2{,}536$	$-0{,}014$
8	$-2{,}536$	$-2{,}532$	$-2{,}534$	$-0{,}007$
9	$-2{,}534$	$-2{,}532$	$-2{,}533$	$-0{,}002$
10	$-2{,}533$	$-2{,}532$		

Согласно таблице, с точностью до 10^{-3} приближенное значение корня $\hat{x} =$ $= -2{,}532$, поскольку $|b_n - a_n| = |-2{,}532 + 2{,}533| = 0{,}001$.

Метод хорд. Этот метод широко используется при решении алгебраических и трансцендентных уравнений.

Пусть дано уравнение $f(x) = 0$, $f(x) \in C^2$, причем корень ξ отделен и находится на $[a, b]$. Суть метода хорд состоит в том, что на достаточно малом отрезке $[a, b]$ дуга кривой $y = f(x)$ заменяется стягивающей ее хордой и в качестве приближенного значения корня берется точка пересечения хорды с осью X (рис. 21.7, a).

Рассмотрим случай, когда возрастающая функция $f(x)$ ($f'(x) >$

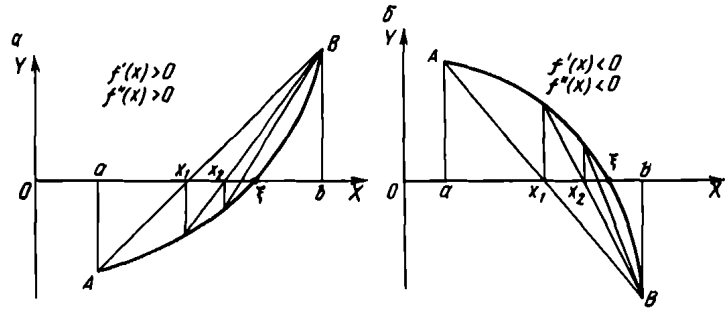


Рис. 21.7

> 0) — выпуклая вниз ($f''(x) > 0$), т. е. $f'(x)f''(x) > 0$ (рис. 21.7). Составим уравнение хорды, проходящей через точки $A = (a,\ f(a))$ и $B = (b,\ f(b))$:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a} \Rightarrow y = f(a) + \frac{x - a}{b - a}(f(b) - f(a)).$$

Приравняв здесь y нулю, найдем точку $x = x_1$ пересечения хорды AB с осью X:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a). \tag{21.57}$$

Это и есть первое приближение корня, полученное по методу хорд. Теперь корень ξ находится на отрезке $[x_1,\ b]$. Повторив рассуждения применительно к этому отрезку, по аналогии с формулой (21.57) получим следующее приближение:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}(b - x_1).$$

Продолжив этот процесс, найдем

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f(b) - f(x_2)}(b - x_2).$$

В общем случае

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n),\ n = 0,\ 1,\ \ldots;\ x_0 = a. \tag{21.58}$$

Уточнение корня по методу хорд продолжается до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность ε корня, т. е. пока не будет выполнено условие $|\xi - x_n| < |x_{n+1} - x_n| \leqslant \varepsilon$.

Заметим, что при выводе формулы (21.58) правый конец $x = b$ отрезка $[a,\ b]$ неподвижен. При этом знак $f(b)$ совпадает со знаком $f''(b)$. Формула (21.58) имеет место и когда $f(a) > 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$ ($f'(x)\,f''(x) > 0$, $\forall x \in (a,\ b)$). И в этом случае неподвижной также является точка $x = b$ (рис. 21.7, *б*), причем знаки $f(b)$ и $f''(b)$ совпадают.

Для случая $f'(x)f''(x) < 0$, $\forall x \in (a,\ b)$ (рис. 21.8, *а, б*), рассуждая аналогично, получаем приближенное значение корня

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a),\ n = 0,\ 1,\ \ldots;\ x_0 = b. \quad (21.59)$$

Теперь неподвижной является точка $x = a$, причем знаки $f(a)$ и $f''(a)$ совпадают.

Таким образом, выбор формулы (21.58) или (21.59) для уточнения корня уравнения $f(x) = 0$ по методу хорд осуществляется в соответствии со следующим правилом: *неподвижным является тот конец отрезка $[a, b]$, для которого знак функции совпадает со знаком второй производной.*

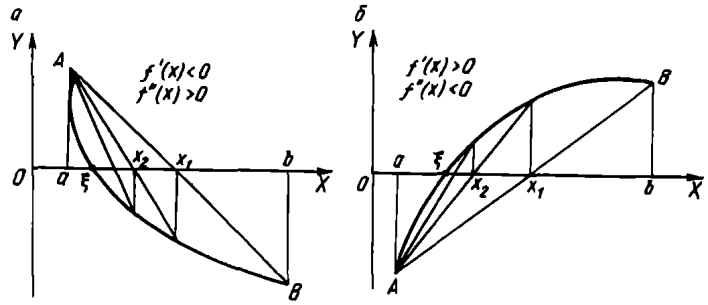


Рис. 21.8

Пример 2. Методом хорд уточнить до $\varepsilon = 0{,}001$ корень уравнения $x^3 - 2x^2 + x - 3 = 0$, находящийся на отрезке $[2{,}1;\ 2{,}2]$.

□ В нашем случае $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$, $f''(x) = 6x - 4$. Так как $f(2{,}1) = -0{,}459$, $f(2{,}2) = 0{,}168 > 0$ и $f''(2{,}2) = 9{,}2 > 0$, то неподвижным является правый конец $b = 2{,}2$, и, следовательно, уточнение корня будем производить по формуле (21.58). Имеем

$$x_1 = 2{,}1 - \frac{(2{,}2 - 2{,}1)(-0{,}459)}{0{,}168 + 0{,}459} = 2{,}173.$$

Находим $f(2{,}173) = -0{,}01011$. Тогда

$$x_2 = 2{,}173 - \frac{(2{,}2 - 2{,}173)(-0{,}01011)}{0{,}168 + 0{,}01011} = 2{,}1745.$$

Для оценки погрешности приближенного значения корня $x_2 = 2{,}1745$ воспользуемся формулой (21.56). Так как $f(2{,}1745) = -0{,}00038543$ и $m = \min\limits_{[2{,}1;\ 2{,}2]} |f'(x)| = \min\limits_{[2{,}1;\ 2{,}2]} |3x^2 - 4x + 1| = 5{,}83$, то

$$|x_2 - \xi| \leqslant \frac{0{,}00038543}{5{,}83} = 6{,}61 \cdot 10^{-5} < 0{,}0001,$$

т. е. требуемая точность корня достигнута.

Метод Ньютона (касательных). Пусть дано уравнение $f(x) = 0$, $f(x) \in C^2$, причем корень $\xi \in [a, b]$ отделен. Суть метода Ньютона состоит в том, что дуга кривой $y = f(x)$ заменяется касательной к ней и за приближение корня берется абсцисса точки пересечения касательной с осью X (рис. 21.9, *а*).

Рассмотрим случай, когда возрастающая функция $f(x)$ $(f'(x) > 0)$ — выпуклая вниз $(f''(x) > 0)$, т. е. $f'(x)f''(x) > 0$ и $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ (рис. 21.9, *а*). Уравнение касательной к графику $f(x)$ в точке $B = (b,\ f(b))$ имеет вид $y - f(b) = f'(b)(x - b)$. Отсюда при $y = 0$

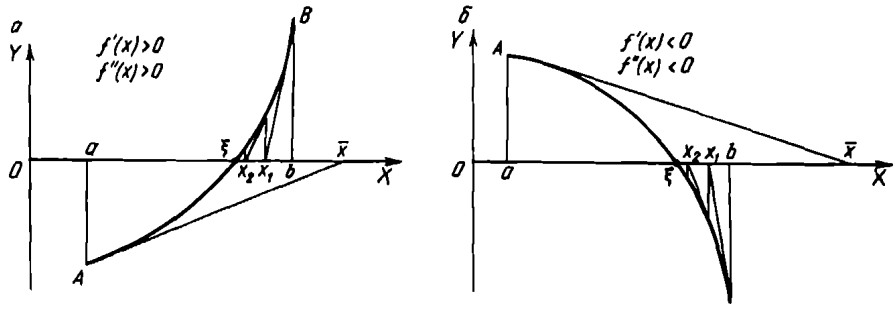


Рис. 21.9

получаем точку пересечения касательной с осью X, т. е. первое приближение корня по методу Ньютона: $x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$. Теперь искомый корень ξ находится на отрезке $[a, x_1]$. Повторив наши рассуждения применительно к этому отрезку, получим следующее приближение корня:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Продолжив этот процесс, найдем

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{21.60}$$

Это и есть формула $(n+1)$-го приближения корня по методу Ньютона, где в качестве начальной точки x_0 берется точка $x_0 = b$. Заметим, что при выводе формулы (21.60) функция $f(x)$ удовлетворяла условию $f(b) > 0$ и $f''(b) > 0$. Если же в рассматриваемом случае за начальную точку взять не $x_0 = b$, а $x_0 = a$, то, вообще говоря, уточнения корня может не произойти, так как точка $\bar{x}$ пересечения касательной с осью X может оказаться за пределами отрезка $[a, b]$ (рис. 21,9, *а*).

Формула (21.60) имеет место и когда $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$ ($f'(x)f''(x) > 0$). В этом случае начальной точкой служит $x_0 = b$ (рис. 21.9, *б*), причем знаки $f(b)$ и $f''(b)$ совпадают.

Для случая $f'(x)f''(x) < 0$, $\forall x \in (a, b)$, рассуждая аналогично, получаем приближенное значение корня по формуле (21.60), но в ней начальной точкой является $x_0 = a$. Знаки $f(a)$ и $f''(a)$ также совпадают (рис. 21.10, *а, б*).

Таким образом, выбор начальной точки для уточнения корня уравнения $f(x) = 0$ по методу Ньютона осуществляется по правилу: *начальной точкой a или b отрезка $[a, b]$ является та, для которой знак функции совпадает со знаком второй производной.*

Для оценки погрешности по методу Ньютона можно пользоваться общей формулой (21.56).

Пример 3. Вычислить $\sqrt{13}$ по методу Ньютона с точностью $\varepsilon = 0{,}00001$.

□ Значение $\xi = \sqrt{13}$ является корнем уравнения $f(x) = x^2 - 13 = 0$, причем

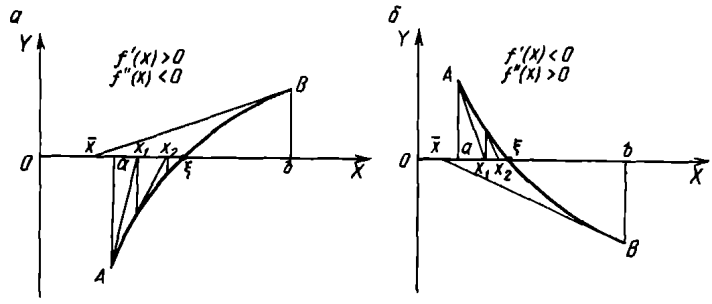


Рис. 21.10

$3<\xi<4$, т. е. $a=3$, $b=4$. Так как $f(4)=3>0$ и $f''(4)=2>0$, используем формулу (21.60), взяв за начальную точку $x_0=b=4$. Последовательно получим:

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=4-\frac{3}{2\cdot 4}=3{,}625;$$

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=3{,}625-\frac{0{,}140625}{2\cdot 3{,}625}=3{,}605603;$$

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}=3{,}605603-\frac{3{,}77\cdot 10^{-4}}{2\cdot 3{,}605603}=3{,}605551.$$

Так как $|f(3{,}605551)|=2\cdot 10^{-6}$ и $m=\min\limits_{x\in[3.4]}|f'(x)|=6$, то по формуле (21.56) имеем $|x_3-\sqrt{13}|\leqslant 3{,}3333\cdot 10^{-6}<10^{-5}$, т. е. требуемая точность достигнута.

Итак, с точностью $\varepsilon=10^{-5}$ значение $\xi=\sqrt{13}=3{,}60555$.

Теорема о неподвижной точке. Пусть $\mathbf{f}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ — непрерывное отображение. Говорят, что оно удовлетворяет *условию Липшица**, если существует константа $q>0$, такая, что выполняется неравенство

$$||\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{y})||\leqslant q||\mathbf{x}-\mathbf{y}||,\ \forall\mathbf{x},\ \mathbf{y}\in\mathbf{R}^n. \qquad (21.61)$$

Отображение $\mathbf{f}$ называется *сжимающим*, если оно удовлетворяет условию Липшица с константой $0<q<1$. Число q называется *коэффициентом сжатия*.

Пример 4. Пусть f — скалярная функция действительной переменной x. Тогда при $|f'(x)|\leqslant q<1$ отображение $f(x)$ будет сжимающим, так как по теореме Лагранжа $|f(x_2)-f(x_1)|=|f'(\xi)|\,|x_2-x_1|\leqslant q|x_2-x_1|$, $\xi\in[x_1,\ x_2]$.

Пример 5. Пусть отображение $\mathbf{f}$: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ — непрерывно дифференцируемое. Если $k=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right|^2<1$, то, как показано в теореме 6.11, ч. II, выполнено равенство $||\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)||\leqslant k||\mathbf{x}-\mathbf{x}^0||$, т. е. $\mathbf{f}$ — сжимающее отображение при $k<1$.

Точка $\mathbf{x}^*$ для отображения $\mathbf{f}$: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ называется неподвижной, если $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)=\mathbf{x}^*$.

---

* Р. Липшиц (1832—1903) — немецкий математик.

Имеет место

Теорема 21.1 (Банаха* о неподвижной точке). Пусть $\mathbf{f}$ непрерывно отображает замкнутое множество $D \subset \mathbb{R}^n$ в D и является сжимающим с коэффициентом сжатия q. Тогда $\mathbf{f}$ имеет в D единственную неподвижную точку x^*. При любом начальном значении $\mathbf{x}^0 \in D$ последовательные приближения

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^n), \quad n \geqslant 0, \tag{21.62}$$

сходятся к $\mathbf{x}^*$ и справедлива следующая оценка скорости сходимости:

$$\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^n\| \leqslant \frac{q^n}{1-q} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) - \mathbf{x}^0\| = \frac{q^n}{1-q} \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\|. \tag{21.63}$$

□ Так как $\mathbf{f}$ — сжимающее отображение, то, согласно равенству (21.62), последовательно будем иметь:

$$\|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1\| = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}^1) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)\| \leqslant q \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\|;$$
$$\|\mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^2\| = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}^2) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^1)\| \leqslant q \|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1\| \leqslant q^2 \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\|;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\|\mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{x}^n\| = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^{n-1})\| \leqslant \ldots \leqslant q^n \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\|.$$

Отсюда по неравенству треугольника для нормы (формула (1.90), ч. I) получаем

$$\|\mathbf{x}^{n+p} - \mathbf{x}^n\| = \|(\mathbf{x}^{n+p} - \mathbf{x}^{n+p-1}) + (\mathbf{x}^{n+p-1} - \mathbf{x}^{n+p-2}) + (\mathbf{x}^{n+p-2} - \mathbf{x}^{n+p-3}) + \ldots + (\mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{x}^n)\| \leqslant \|\mathbf{x}^{n+p} - \mathbf{x}^{n+p-1}\| + \|\mathbf{x}^{n+p-1} - \mathbf{x}^{n+p-2}\| + \ldots + \|\mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{x}^n\| \leqslant (q^{n+p-1} + q^{n+p-2} + \ldots + q)\|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\| = q^n(1 + q + q^2 + \ldots + q^{p-1})\|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\|.$$

Это неравенство еще более усилится, если конечную сумму в скобках заменить на бесконечную. Тогда получим неравенство

$$\|\mathbf{x}^{n+p} - \mathbf{x}^n\| \leqslant q^n(1 + q + q^2 + \ldots)\|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\| = \frac{q^n}{1-q}\|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\|, \tag{21.64}$$

так как $0 < q < 1$. Из формулы видно, что последовательность $(\mathbf{x}^n) \in D$ является последовательностью Коши в $\mathbb{R}^n$, а значит, сходится, т. е. существует $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x}^n = \mathbf{x}^* \in D$, так как D замкнуто. В силу непрерывности $\mathbf{f}$ из равенства (21.62) получим

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^* = \lim_{n\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}^n) = \mathbf{f}(\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}^n) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*),$$

т. е. $\mathbf{x}^*$ — неподвижная точка отображения $\mathbf{f}$. Покажем, что она единственная. Предположим, что существуют две различные неподвижные точки $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{x}^{**}$ из D. Тогда $\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{**}\| = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^{**})\| \leqslant q\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{**}\|$, т. е. $q \geqslant 1$, что невозможно, так как по условию $q < 1$.

---

* С. Банах (1892—1945) — польский математик.

Оценка (21.63) следует из оценки (21.64), если в последней учесть, что $\mathbf{x}^1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$ и устремить $p \to \infty$. ■

Метод итераций решения уравнений. Теорема о неподвижной точке широко используется при решении уравнений и систем уравнений по *методу итераций*. Рассмотрим уравнение $\varphi(x) = 0$, $x \in [a, b]$, где φ — непрерывная функция, причем $\varphi(x) \in [a, b]$. Пусть требуется найти корень $\xi \in [a, b]$ этого уравнения. Введем вспомогательную функцию $f(x) = x - \lambda\varphi(x)$, где λ — некоторый неизвестный пока параметр, отличный от нуля. Ясно, что неподвижные точки функции $f(x)$ совпадают с корнями функции $\varphi(x)$, так как равенство $f(x) = x$ равносильно уравнению $\varphi(x) = 0$. Тем самым отыскание корней уравнения $\varphi(x) = 0$ сводится к нахождению неподвижных точек функции f, т. е. последовательные приближения корня уравнения $\varphi(x) = 0$, согласно равенству (21.62), определяются соотношениями

$$x_{n+1} = f(x_n) = x_n - \lambda\varphi(x_n), \quad n = 0, 1, \ldots \tag{21.65}$$

Но (см. пример 4) f — сжимающее отображение, если

$$|f'(x)| = |1 - \lambda\varphi'(x)| \leqslant q < 1, \ \forall x \in [a, b].$$

Отсюда получим, что число $\lambda > 0$ должно удовлетворять условию

$$0 < \lambda\varphi'(x) < 2. \tag{21.66}$$

Предположим, что $0 < m \leqslant \varphi'(x) \leqslant M$, $\forall x \in [a, b]$ (если функция $\varphi(x)$ отрицательная, то вместо уравнения $\varphi(x) = 0$ рассматриваем уравнение $-\varphi(x) = 0$). Из неравенства (21.66) следует $0 < \lambda < 2/f'(x) \Leftrightarrow 0 < \lambda < 2/M$. Обычно в качестве λ берут $1/M$. Тогда получим уравнение $f(x) = x - \frac{\varphi(x)}{M}$. Следовательно, в этом случае итерационный процесс (21.65) принимает вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\varphi(x_n)}{M}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{21.67}$$

Если же $\varphi'(x) < 0$, $\forall x \in [a, b]$ и $0 < m \leqslant |\varphi'(x)| \leqslant M$, получим уравнение $f(x) = x + \varphi(x)/M$ и соответствующий итерационный процесс в виде

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\varphi(x_n)}{M}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Метод итераций решения уравнения $\varphi(x) = 0$ имеет простую геометрическую иллюстрацию на плоскости XY. Действительно, отыскание корня уравнения $\varphi(x) = 0$ равносильно нахождению неподвижных точек функции $f(x) = x$ $(f(x) = x - \lambda\varphi(x))$, т. е. отысканию абсцисс точек пересечения графиков функций $y = x$ и $y = f(x)$. Тогда сходимость итерационного процесса означает следующее: график функции f, такой, что последовательность $(x_n) = (f(x_n))$ сходится к неподвижной точке x^* при любом начальном приближении x_0 (рис. 21.11, *а*), в противном случае последовательность расходится (рис. 21.11, *б*) (если только начальная точка x_0 сама не является неподвижной).

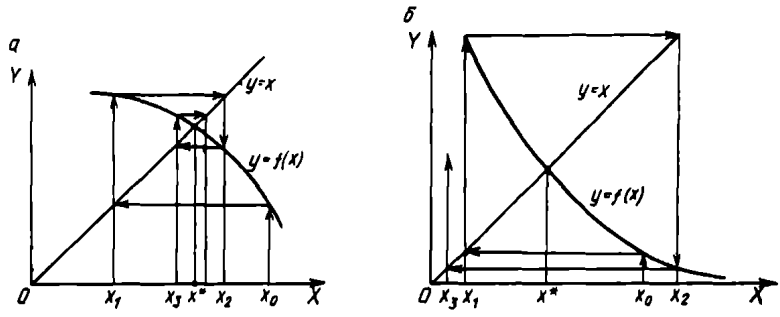


Рис. 21.11

Пример 6. С точностью до $\varepsilon = 10^{-4}$ найти больший корень уравнения $2x - \ln x - 4 = 0$.

□ Предварительно отделим корни уравнения $\varphi(x) = 2x - \ln x - 4$. Так как $\varphi'(x) = 2 - 1/x = 0 \Leftrightarrow (2x-1)/x = 0 \Rightarrow x = 1/2$, то с учетом области определения функции $\ln x$ $(x > 0)$ составим следующую таблицу:

x	0	$(0, 1/2)$	$1/2$	$(1/2, +\infty)$	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+$
$\varphi(x)$	$+\infty$	↘	$\ln 2 - 3 < 0$	↗	$+\infty$

Из таблицы следует, что один корень уравнения $\varphi(x) = 0$ находится в интервале $(0, 1/2)$, а второй, больший, в интервале $(1/2, +\infty)$. Уточним его. Заметим, что при $x = 2 \Rightarrow \varphi(2) = -\ln 2 < 0$, а при $x = 3 \Rightarrow \varphi(3) = 2 - \ln 3 > 0$, т. е. больший корень уравнения $\varphi(x) = 0$ находится на отрезке $[2,3]$.

Поскольку $M = \max\limits_{[2,3]} \varphi'(x) = \dfrac{5}{3} = \dfrac{1}{q}$, то по формуле (21.67) получаем итерационную последовательность

$$x_{n+1} = x_n - \frac{3}{5}(2x_n - \ln x_n - 4), \quad n \geqslant 0, \ldots, \tag{21.68}$$

где начальное приближение x_0 — любая точка отрезка $[2, 3]$. Для примера возьмем $x_0 = 2{,}5$. Тогда по формуле (21.68)

$$x_1 = 2{,}5 - 0{,}6(5 - \ln 2{,}5 - 4) = 2{,}4497;$$
$$x_2 = 2{,}4497 - 0{,}6(4{,}8995 - \ln 2{,}4497 - 4) = 2{,}4476;$$
$$x_3 = 2{,}4476 - 0{,}6(4{,}8952 - \ln 2{,}4476 - 4) = 2{,}4475;$$
$$x_4 = 2{,}4475 - 0{,}6(4{,}8950 - \ln 2{,}4475 - 4) = 2{,}4475.$$

Заметим, что требуемая точность $\varepsilon = 10^{-4}$ уже достигнута. Это подтверждается формулой (21.63), в которой надо положить $n = 4$, $x_0 = 2{,}5$; $f(x_0) = x_1 = 2{,}4497$, $f(x) = x - 0{,}6(2x - \ln x - 4)$, и, согласно примеру 4, $q = \max\limits_{[2,3]} |f'(x)| = \max\limits_{[2,3]} \left| -\dfrac{1}{5} + \right.$ $\left. + \dfrac{3}{5x} \right| = \dfrac{1}{10}$. Действительно, по формуле (21.63) получим $|x^* - x_4| = |x^* - 2{,}4475| < \dfrac{(0{,}1)^4}{0{,}9}(2{,}5 - 2{,}4497) = 5{,}5888 \cdot 10^{-5}$.

Метод простой итерации решения линейных систем. Рассмотрим линейную систему из n уравнений с n неизвестными в векторно-матричном виде

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{21.69}$$

где $A = [a_{ij}]$ — $n \times n$ — матрица системы; $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ — вектор-столбец неизвестных; $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$ — вектор-столбец правых частей системы.

Введем вспомогательную систему

$$\mathbf{x} = \mathbf{x} - D(A\mathbf{x} - \mathbf{b}), \tag{21.70}$$

где D — некоторая невырожденная матрица. Ясно, что неподвижные точки правой части уравнения (21.70) совпадают с решениями исходной системы (21.69). Преобразуем равенство (21.70) к виду

$$\mathbf{x} = B\mathbf{x} + \mathbf{c}, \tag{21.71}$$

где $B = E - DA$, $\mathbf{c} = D\mathbf{b}$. Матрицу D в равенстве (21.70) надо подобрать так, чтобы отображение $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = B\mathbf{x} + \mathbf{c} = (E - DA)\mathbf{x} + \mathbf{c}$ было сжимающим. Это будет, если

$$||\mathbf{f}(\mathbf{x}^1) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^2)|| = ||B(\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2)|| \leqslant q\,||\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2||, \tag{21.72}$$

где $0 < q < 1$. Так как $\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = B = [b_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, то, согласно неравенству (21.72) и примеру 5, получим, что отображение $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = B\mathbf{x} + \mathbf{c}$ — сжимающее, если

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^2 < 1. \tag{21.73}$$

При выполнении условия (21.73) итерационный процесс

$$\mathbf{x}^{n+1} = B\mathbf{x}^n + \mathbf{c}, \quad n \geqslant 0, \tag{21.74}$$

согласно теореме Банаха 21.1, сходится для любого начального вектора $\mathbf{x}^0$.

Итерационный процесс (21.74) называется *простым,* а основанный на нем метод решения линейных систем — *методом простой итерации.*

Приведем без доказательства *критерий сходимости итерационного процесса* (21.74).

Теорема 21.2. Пусть система (21.69) имеет единственное решение $\mathbf{x}^*$. Итерационный процесс (21.74) сходится к решению $\mathbf{x}^*$ при любом начальном приближении $\mathbf{x}^0$ тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы B по модулю меньше единицы. Доказательство этой теоремы можно найти, например, в книге Н. С. Бахвалова «Численные методы», т. 1.

Проверка выполнения условий теоремы 21.2, как правило, вызывает затруднения. Поэтому полезными являются специальные достаточные признаки сходимости. Если система имеет вид $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, то метод простой итерации удобен, когда диагональные элементы матрицы A по модулю превосходят сумму модулей остальных элементов соответствующих строк. В этом случае систему уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ разрешают относительно неизвестных, стоящих на главной диагонали. В результате получается система вида $\mathbf{x} = B\mathbf{x} + \mathbf{c}$. При этом ясно, что сумма модулей всех коэффициентов в каждой

строке матрицы B меньше единицы. Если теперь в качестве нормы вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ взять $||\mathbf{x}|| = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$, то неравенство (21.72) имеет место при

$$q = \max\{\sum_{j=1}^{n} |a_{1j}|, \sum_{j=1}^{n} |a_{2j}|, \ldots, \sum_{j=1}^{n} |a_{nj}|\}.$$

Отсюда следует, что *если сумма модулей коэффициентов каждой строки матрицы A меньше единицы, то отображение $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = B\mathbf{x} + \mathbf{c}$ — сжимающее и, следовательно, итерационный процесс (21.74) сходится к решению $\mathbf{x}^*$* системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

На практике итерационный процесс заканчивается, если разность $|\mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{x}^n| < \varepsilon$, где ε — заданная точность.

Пример 7. Методом простой итерации решить систему

$$\left.\begin{array}{r} 4x_1 + 0{,}24x_2 - 0{,}08x_3 = 8; \\ 0{,}09x_1 + 3x_2 - 0{,}15x_3 = 9; \\ 0{,}04x_1 - 0{,}08x_2 + 4x_3 = 20 \end{array}\right\}$$

с точностью до $\varepsilon = 10^{-3}$.

□ Диагональные элементы матрицы A системы по модулю превосходят сумму модулей остальных элементов соответствующих строк. Разрешим систему относительно неизвестных, стоящих на диагонали:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = -0{,}06x_2 + 0{,}02x_3 + 2; \\ x_2 = -0{,}03x_1 + 0{,}05x_3 + 3; \\ x_3 = -0{,}01x_1 + 0{,}02x_2 + 5. \end{array}\right\}$$

Тогда итерационный процесс имеет вид $\mathbf{x}^{(n+1)} = B\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{c}$ или в развернутом виде

$$\begin{pmatrix} x_1^{(n+1)} \\ x_2^{(n+1)} \\ x_3^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}06 & 0{,}02 \\ -0{,}03 & 0 & 0{,}05 \\ -0{,}01 & 0{,}02 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ x_3^{(n)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

В качестве начального приближения возьмем, например, вектор-столбец $\mathbf{x}^0 = (0, 0, 0)^T = \mathbf{0}$.

Результаты вычисления сведем в таблицу:

n	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$x_3^{(n)}$
1	2	3	5
2	1,92	3,19	5,04
3	1,9094	3,1944	5,0446
4	1,90923	3,194595	5,04489

Норма разности между третьим и четвертым приближениями

$$||\mathbf{x}^{(4)} - \mathbf{x}^{(3)}|| = \max\{|x_1^{(4)} - x_1^{(3)}|, |x_2^4 - x_2^3|, |x_3^{(4)} - x_3^{(3)}|\} = 0{,}00055 < 10^{-3},$$

следовательно, процесс итерации закончен, и $x_1 = 0{,}909$, $x_2 = 3{,}195$, $x_3 = 5{,}045$.

Задачи и упражнения

1. Методом хорд определить с точностью до $\varepsilon = 0{,}001$ корень уравнения $x - \sin x = 0{,}25$, заключенный на отрезке $[0, \pi/2]$.

2. По методу Ньютона вычислить с точностью до $\varepsilon = 10^{-3}$ корень уравнения $e^x - x^2 = 0$.

3. Методом итерации вычислить с точностью до $\varepsilon = 10^{-4}$ корень уравнения $5x^3 - 20x + 3 = 0$, заключенный на отрезке $[0, 1]$.

4. Показать, что оператор $f(x) = x^3$, $x \in \mathbf{R}$, является оператором сжатия при $|x| < 1/\sqrt{3}$ и не является им при $x = 1$, $x = -1$.

5. Показать, что метод Ньютона сходится к корню уравнения $f(x) = 0$, если $|f(x)f''(x)|/|f'(x)| < 1$.

6. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 8x_1 + x_2 + x_3 &= 24; \\ x_1 + 5x_2 - x_3 &= 9; \\ x_1 - x_2 + 5x_3 &= -3 \end{aligned}\right\}$$

с точностью до 10^{-3}.

21.6. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ

Постановка задачи. Пусть $f(x)$ — действительная функция, определенная на отрезке $[a, b]$ и интегрируемая на нем по Риману. Вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона — Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ можно выполнить для достаточно узкого класса функций $f(x)$, первообразные $F(x)$ которых выражаются через элементарные или табулированные функции. Поэтому в большинстве случаев для вычисления определенных интегралов используют приближенные (численные) методы.

Под *численным интегрированием* понимают нахождение приближенного значения интеграла с помощью приближенных методов, использующих так называемые *квадратурные формулы* вида

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k). \tag{21.75}$$

Здесь $x_k \in [a, b]$ — *узлы интегрирования*, а A_k — *квадратурные коэффициенты*, или *веса*.

Погрешностью численного интегрирования называется величина

$$R = \left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)\right|.$$

Докажем теорему, которую будем использовать для оценки погрешности численного интегрирования.

Теорема 21.3 (обобщенная теорема о среднем). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, причем $g(x) \geqslant 0$, $\forall x \in [a, b]$. Тогда существует точка $\xi \in [a, b]$, такая, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx. \tag{21.76}$$

□ Очевидно, что при $g(x) \equiv 0$ равенство (21.76) имеет место, поэтому будем считать, что $g(x) \not\equiv 0$, $\forall x \in [a, b]$. Пусть $M = \max\limits_{[a, b]} f(x)$, $m = \min\limits_{[a, b]} f(x)$. Так как $g(x) \geqslant 0$, то

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x), \quad \forall x \in [a, b],$$

откуда $m\int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M\int_a^b g(x)dx$. Так как $g(x) \geqslant 0$ и $g(x) \not\equiv 0$, $\forall x \in [a, b]$, то $\int_a^b g(x)dx > 0$. Тогда из последнего равенства

$$m \leqslant \frac{1}{\int_a^b g(x)dx} \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M.$$

Отсюда в силу непрерывности функции $f(x)$, согласно теореме Больцано — Коши 2.14 (ч. I) о промежуточном значении, существует точка $\xi \in [a, b]$, в которой имеет место соотношение

$$\frac{1}{\int_a^b g(x)dx} \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi),$$

равносильное формуле (21.76). ■

Опишем некоторые простейшие типы квадратурных формул.

Квадратурные формулы прямоугольников. Разобъем отрезок интегрирования $[a, b]$ на n равных частей равноотстоящими узлами интегрирования $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b$. При этом расстояние h между двумя соседними узлами, называемое *шагом интегрирования,* есть величина постоянная, равная $h = (b-a)/n$. Тогда $x_k = a + kh$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Рассмотрим участок интегрирования $[x_{k-1}, x_k]$ (рис. 21.12). Ясно, что

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx. \qquad (21.77)$$

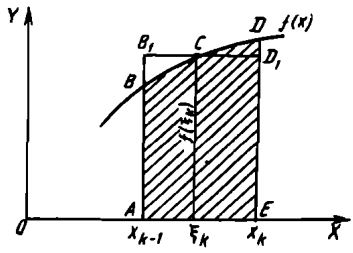


Рис. 21.12

Но $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$ есть площадь криволинейной трапеции $ABCDE$ (рис. 21.12). Заменим эту площадь площадью прямоугольника AB_1CD_1E с основанием $AE = x_k - x_{k-1}$ и высотой $f(\xi_k)$, где ξ_k — некоторая точка отрезка $[x_{k-1}, x_k]$. Тогда $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx f(\xi_k)h$ и, согласно равенству (21.77),

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)h = h\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) =$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k). \qquad (21.78)$$

Принимая в качестве набора точек ξ_k те или иные значения аргумента из отрезка $[x_{k-1}, x_k]$, получаем различные формулы приближенного интегрирования. В частности, если в качестве ξ_k выбрать левые концы отрезков $[x_{k-1}, x_k]$, т. е. $\xi_k = x_{k-1}$, то из равенства (21.78) получим так называемую *формулу левых прямоугольников:*

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) =$$

$$= \frac{b-a}{n} (f(a) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}))$$

или, так как $x_k = a + kh$, то

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} (f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(a+(n-1)h)). \quad (21.79)$$

При выборе в качестве ξ_k правых концов отрезков $[x_{k-1}, x_k]$, т. е. $x_k = \xi_k$, получим *формулу правых прямоугольников:*

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} (f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(a+nh)), \quad (21.80)$$

где $a + nh = b$.

При выборе в качестве ξ_k середины отрезков $[x_{k-1}, x_k]$, т. е. $\xi_k = (x_{k-1} + x_k)/2$, получим формулу

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \left(f\left(a + \frac{h}{2}\right) + f\left(a + \frac{3h}{2}\right) + \ldots + f\left(a + \frac{2n-1}{n} h\right)\right) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \left(k - \frac{1}{2}\right)h\right). \quad (21.81)$$

Равенство (21.81) называется *составной квадратурной формулой прямоугольников.*

Заметим, что в формулах (21.79) — (21.81) веса $A_k = (b-a)/n$.

Найдем оценку погрешности приближенного интегрирования по формуле прямоугольников (21.81). Пусть $f(x) \in C^2[a, b]$. Разложим $f(x)$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$:

$$f(x) = f\left(a + \left(k - \frac{1}{2}\right)h\right) + f'\left(a + \left(k - \frac{1}{2}\right)h\right)\left(x - a - \left(k - \frac{1}{2}\right)h\right) + \frac{1}{2} f''(\eta_k)\left(x - a - \left(k - \frac{1}{2}\right)h\right)^2,$$

где $\eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Ясно, что η_k зависит также и от x. Подставим это разложение в формулу (21.77) и, выполнив интегрирование, получим

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\left(k-\frac{1}{2}\right)h\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} f'\left(a+\left(k-\frac{1}{2}\right)h\right)\left(x-a-\left(k-\frac{1}{2}\right)h\right)^2 \Big|_{a+(k-1)h}^{a+kh} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(\eta_k)\left(x-a-\left(k-\frac{1}{2}\right)h\right)^2 dx =$$

$$=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\left(k-\frac{1}{2}\right)h\right)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(\eta_k)\left(x-\right.$$

$$\left.-a-\left(k-\frac{1}{2}\right)h\right)^2 dx. \qquad (21.82)$$

Применив теорему 21.3 к интегралу $I_k=\int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(\eta_k)\left(x-a-\right.$ $\left.-\left(k-\frac{1}{2}\right)h\right)^2 dx$ при $g(x)=\left(x-a-\left(k-\frac{1}{2}\right)h\right)^2$, будем иметь

$$I_k = f''(\bar{\eta}_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left(x-a-\left(k-\frac{1}{2}\right)h\right)^2 dx =$$

$$=\frac{h^3}{12}f''(\bar{\eta}_k),\ \bar{\eta}_k\in[x_{k-1},\ x_k].$$

Отсюда и из равенства (21.82) получим

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\left(k-\frac{1}{2}\right)h\right) +$$

$$+\frac{h^3}{24}\sum_{k=1}^{n} f''(\bar{\eta}_k). \qquad (21.83)$$

Но $\sum_{k=1}^{n} f''(\bar{\eta}_k)=n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{f''(\bar{\eta}_k)}{n}\right)$, где величина в скобках есть среднее значение производных $f''(\bar{\eta}_k)$, $k=1, 2, \ldots, n$. В силу непрерывности f'' существует такая точка $\eta\in(a, b)$, что $n\sum_{k=1}^{n}\frac{f''(\bar{\eta}_k)}{n}=nf''(\eta)=$ $=\frac{b-a}{n}f''(\eta)$. Таким образом, равенство (21.83) можно переписать в виде

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\left(k-\frac{1}{2}\right)h\right)+\frac{b-a}{24}h^2 f''(\eta).$$

Из него следует, что погрешность квадратурной формулы (21.81) определяется выражением

$$R = \left| \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \left(k - \frac{1}{2}\right)h\right) \right| = \frac{b-a}{24} h^2 |f''(\eta)|,$$

где $\eta \in (a, b)$. Если обозначать $M_2 = \max\limits_{[a, b]} |f''(x)|$, то максимальная сверху оценка погрешности определяется выражением

$$R \leqslant \frac{b-a}{24} h^2 M_2 = \frac{(b-a)^3}{24n^2} M_2. \qquad (21.84)$$

Квадратурная формула трапеций. На каждом частичном отрезке интегрирования $[x_{k-1}, x_k]$, $x_k = a + kh$, $h = (b-a)/n$, площадь криволинейной трапеции $ABCDE$ (рис. 21.13) заменим площадью прямоугольной трапеции $ABDE$ по формуле

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} h.$$

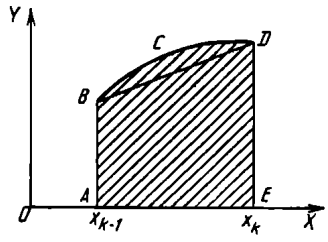


Рис. 21.13

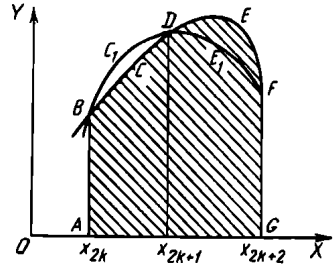


Рис. 21.14

Тогда из равенства (21.77) приближенно получим

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} h =$$

$$= \frac{b-a}{2n} (f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \ldots + 2f(a+(n-1)h) + f(b)),$$

т. е.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) \right). \qquad (21.85)$$

Формула (21.85) называется *квадратурной формулой трапеций.* Для нее, как и для квадратурной формулы составных прямоугольников, можно получить оценку погрешности интегрирования:

$$R \leqslant \frac{(b-a)h^2}{12} M_2 = \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2, \qquad (21.86)$$

где $M_2 = \max\limits_{[a,\,b]} |f''(x)|$.

Квадратурная формула Симпсона*. Разделим промежуток интегрирования $[a, b]$ на $2n$ частей так, что $h = (b-a)/(2n)$, $x_k = a + kh$. Площадь криволинейной трапеции $ABCDEFG$, определенной интегралом $\int\limits_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)dx$, заменим площадью трапеции ABC_1DE_1FG, ограниченной сверху параболой, проходящей через точки $B = (x_{2k}, f(x_{2k}))$, $D = (x_{2k+1}, f(x_{2k+1}))$ и $F = (x_{2k+2}, f(x_{2k+2}))$ (рис. 21.14). Уравнение этой параболы, согласно формуле (21.33), имеет вид

$$y(x) = \frac{(x-x_{2k+1})(x-x_{2k+2})}{2h^2} f(x_{2k}) +$$
$$+ \frac{(x-x_{2k})(x-x_{2k+2})}{-h^2} f(x_{2k+1}) + \frac{(x-x_{2k})(x-x_{2k+1})}{2h^2} f(x_{2k+2}).$$

Интегрируя эту функцию от x_{2k} до x_{2k+2}, получаем площадь параболической трапеции ABC_1DE_1FG:

$$\int\limits_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} y(x)dx = \frac{1}{3} f(x_{2k})h + \frac{4}{3} f(x_{2k+1})h + \frac{1}{3} f(x_{2k+2})h =$$

$$= \frac{h}{3}(f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})).$$

Просуммировав это выражение по всем частичным отрезкам $[x_{2k}, x_{2k+2}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, получим приближенную формулу

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})), \qquad (21.87)$$

называемую *квадратурной формулой Симпсона* или *формулой парабол*. В подробной записи формула (21.87) имеет вид

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}(f(a) + f(b) + 2(f(x_2) + f(x_4) + \ldots +$$
$$+ f(x_{2n-2})) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{2n-1}))). \qquad (21.88)$$

Напоминаем, что $x_k = a + kh$.

Оценка погрешности формулы (21.87) определяется выражением

$$R \leqslant \frac{(b-a)h^4}{180} M_4 = \frac{(b-a)^5}{2880n^4} M_4, \qquad (21.89)$$

* Т. Симпсон (1710—1761) — английский математик.

где $M_4 = \max\limits_{[a,\,b]} |f^{IV}(x)|$.

Пример 1. Найти число узлов для вычисления интеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ по формуле составных прямоугольников с точностью до 10^{-4}.

□ Имеем: $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} \Rightarrow M_2 = \max\limits_{[0,\,1]} |f''(x)| = f''(0) = 2$. Тогда по формуле (21.84)

$$\frac{(b-a)^3}{24n^2} M_2 = \frac{1}{24n^2} \cdot 2 \leqslant \frac{1}{10\,000} \Rightarrow n \geqslant 50/\sqrt{3} \Rightarrow n \geqslant 30.$$

Итак, для вычисления искомого интеграла с точностью до 10^{-4} по формуле составных прямоугольников отрезок интегрирования [0, 1] необходимо разбить на 30 равных частей.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}$ с помощью: а) составной формулы прямоугольников; б) формулы трапеции; в) формулы Симпсона, разбивая отрезок интегрирования на 10 равных частей, и произвести оценки погрешностей вычислений.

□ В нашем случае $a = 0$, $b = 1$, $2n = 10$, $h = (b-a)/(2n) = 0{,}1$. За узлы интегрирования примем точки x_0, x_2, x_4, x_6, x_8, x_{10}. Составим таблицу значений $f(x_k)$ функции $f(x) = 1/(1+x)$ в точках x_0, x_1, x_2, ..., x_{10} (все вычисления будем проводить с четырьмя десятичными знаками после запятой):

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_k	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$f(x_k)$	1	0,909	10,8333	0,7692	0,7143	0,6667	0,6250	0,5882	0,5556	0,5263,	0,5000

а) При вычислении интеграла по формуле прямоугольников (21.81) серединами частичных отрезков интегрирования являются точки x_1, x_3, x_5, x_7, x_9. Поэтому будем иметь:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{1}{5}(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + f(x_7) + f(x_9)) = \frac{1}{5} \cdot 3{,}4595 = 0{,}6912.$$

б) По формуле трапеций (21.85) получим

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{5}\left(\frac{f(0)+f(1)}{2} + f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + f(x_8)\right) = 0{,}6866.$$

в) По формуле Симпсона (21.88) находим

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{30}(f(0) + f(1) + 2(f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + f(x_8)) +$$
$$+ 4(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + f(x_7) + f(x_9))) =$$
$$= \frac{1}{30}(1{,}5000 + 2 \cdot 2{,}7282 + 4 \cdot 3{,}4595) = 0{,}6931.$$

Так как $M_2 = \max\limits_{[0,\,1]} \left|\left(\frac{1}{1+x}\right)''\right| = 2$, $M_4 = \max\limits_{[0,\,1]} \left|\left(\frac{1}{1+x}\right)^{IV}\right| = 24$, то по формулам (21.84), (21.86) и (21.89) следует, что оценки погрешностей вычисления равны соответственно: а) 0,0333; б) 0,0666; в) 0,0021, т. е. наиболее точное значение интеграла получается по формуле Симпсона. Для сравнения приведем точное значение интеграла: $\ln 2 = 0{,}69314717...$

Задачи и упражнения

1. Зная, что $\int\limits_0^1 \frac{4dx}{1+x^2} = \pi$, найти приближенно π по формуле Симпсона, разбивая отрезок интегрирования на 10 одинаковых частей.

2. Вычислить интегралы: а) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{x^3+x+1}$; б) $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-4}$ по формуле прямоугольников.

21.7. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Понятие о численном решении обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Пусть требуется решить задачу Коши:

$$y' = f(x,\ y);\ y(x_0) = y_0, \tag{21.90}$$

где $x,\ x_0 \in [a,\ b]$. Ее решение крайне редко удается получить в квадратурах, т. е. найти такую функцию $y = \varphi(x)$, что $\varphi'(x) \equiv f(x,\ \varphi(x))$, $x \in [a,\ b]$ и $\varphi(x_0) = y_0$. Поэтому возникает необходимость приближенного численного решения этой задачи.

Решить задачу (21.90) численно — значит для заданной последовательности чисел $x_0,\ x_1,\ ...,\ x_n$ из отрезка $[a,\ b]$ и числа y_0, не определяя самого решения $y = \varphi(x)$, вычислить (приближенно) значения $y_1,\ y_2,\ ...,\ y_n$ этого решения в точках $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$. Другими словами, исходя из условий (21.90), найти такие значения y_i, что приближенно $y_i = \varphi(x_i)$, $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$. Таким образом, численное решение задачи (21.90) позволяет вместо отыскания ее точного решения $y = \varphi(x)$ получить таблицу значений этой функции для заданной последовательности аргументов:

x_i	x_0	x_1	x_2	...	x_n
$\varphi(x_i)$	y_0	y_1	y_2	...	y_n

Эта таблица задает значения y_i функции $y = \varphi(x)$ в точках x_i, $i = 0,\ 1,\ ...,\ n$. Тогда функцию $\varphi(x)$ можно приближенно аппроксимировать известными интерполяционными формулами.

Приведем простейшие методы численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Метод ломаных Эйлера. Рассмотрим задачу (21.90), где $f(x,\ y)$ — функция, непрерывно дифференцируемая в прямоугольнике $D =$

$= \{a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$, $x_0 \in [a, b]$. Выбрав достаточно малый шаг интегрирования h, построим систему равноотстоящих точек (узлов) $x_0, x_1, x_2, \ldots$, где $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, а $h = x_k - x_{k-1}$. Проведем касательную в точке (x_0, y_0) графика решения $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения (21.90) с угловым коэффициентом $k_0 = y'(x_0) = f(x_0, y_0)$. Уравнение этой касательной имеет вид

$$y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0). \tag{21.91}$$

За приближенное значение решения уравнения $y' = f(x, y)$ в точке x_1 возьмем ординату y_1 точки пересечения касательной (21.91) с прямой $x = x_1$ (рис. 21.15), т. е.

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) = y_0 + hf(x_0, y_0). \tag{21.92}$$

Через точку (x_1, y_1) проведем прямую с угловым коэффициентом $k_1 = f(x_1, y_1)$

$$y = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1), \tag{21.93}$$

где y_1 определяется равенством (21.92). Находим точку пересечения прямой (21.93) с прямой $x = x_2$. Ее ордината

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1) = y_1 + hf(x_1, y_1). \tag{21.94}$$

Проведем далее через точку (x_2, y_2) прямую с угловым коэффициентом $k_2 = f(x_2, y_2)$ до пересечения с прямой $x = x_3$. Тогда, аналогично предыдущему, получим, что ордината y_3 точки пересечения определяется равенством $y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2)$, где y_2 имеет вид (21.94).

Продолжая этот процесс, получаем семейство отрезков прямых

$$y = y_k + f(x_k, y_k)(x - x_k),\ x \in [x_k, x_{k+1}];\ k = 0, 1, \ldots, \tag{21.95}$$

где

$$y_k = y_{k-1} + hf(x_{k-1}, y_{k-1}),\ k = 1, 2, \ldots \tag{21.96}$$

Отрезки (21.95) образуют ломаную, называемую *ломаной Эйлера*. Она является приближенным решением задачи (21.90) *методом ломаных Эйлера*, аппроксимирующим искомую интегральную кривую $y = \varphi(x)$ уравнения (21.90). Значения y_k приближенного решения в точках x_k определяются формулой (21.96).

Метод Эйлера обладает удовлетворительной точностью лишь при

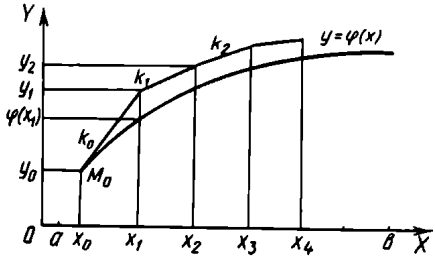


Рис. 21.15

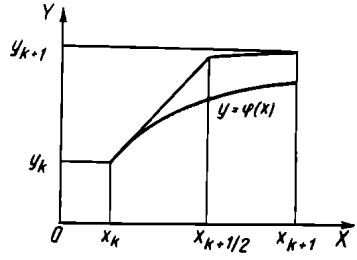


Рис. 21.16

достаточно малых h. Действительно, разложим точное решение уравнения (21.90) в ряд Тейлора в окрестности узла x_k:

$$y(x_k+h)=y(x_k)+y'(x_k)h+O(h^2)= \\ =y(x_k)+hf(x_k,\ y_k)+O(h^2). \qquad (21.97)$$

Сравнив формулы (21.96) и (21.97), придем к выводу, что погрешность формулы (21.96) равна $O(h^2)$.

Отметим, что особенностью метода Эйлера является то, что на каждом шаге интегрирования приближенное значение $y(x_k)$ определяется через $y(x_{k-1})$. Таким образом, на каждом отрезке $[x_{k-1},\ x_k]$ решается задача Коши $y'=f(x,\ y)$, $y(x_{k-1})=y_{k-1}$, $k=1$, 2, ..., что удобно с точки зрения вычислений.

Усовершенствованный метод Эйлера. Поскольку погрешность формулы (21.96) равна $O(h^2)$, метод ломаных Эйлера является мало эффективным. Можно получить более точные результаты, если заменить $f(x_k,\ y_k)$ на $f(x_{k+1/2},\ y_{k+1/2})$, т. е. применить метод ломаных с шагом $h/2$ (рис. 21.16). Ясно, что $x_{k+1/2}=x_k+h/2$, а

$$y_{k+1/2}=y_k+\frac{h}{2}f(x_k,\ y_k), \qquad (21.98)$$

согласно формуле (21.96). Тогда

$$y_{k+1}=y_k+hf(x_{k+1/2},\ y_{k+1/2}). \qquad (21.99)$$

Итак, по *усовершенствованному методу ломаных Эйлера* значение y_{k+1} приближенного решения уравнения $y'=f(x,\ y)$ в точке x_{k+1} определяется выражением (21.99), где $y_{k+1/2}$ вычисляется по формуле (21.98), а $x_{k+1/2}=x_k+h/2$.

Пример 1. Решить задачу Коши $y'=-y$, $y(0)=1$ с шагом $h=0{,}2$ на отрезке $[0,\ 1]$: а) методом ломаных Эйлера; б) усовершенствованным методом ломаных.

□ а) Так как $f(x,\ y)=-y$, $x_0=0$, $y_0=1$, то, согласно формуле (21.96),

$$y_k=y_{k-1}+0{,}2f(x_{k-1},\ y_{k-1})=y_{k-1}-0{,}2y_{k-1}=0{,}8y_{k-1},\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,$$

где $y_0=1$. Составим таблицу значений приближенного решения по методу ломаных Эйлера:

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
y_k	1	0,8	0,64	0,512	0,4096	0,3277

б) Имеем

$$x_{k+1/2}=x_k+h/2=x_0+kh+h/2=x_0+h(k+1/2)=0{,}2(k+1/2)=0{,}2k+0{,}1.$$

По формуле (21.98)

$$y_{k+1/2}=y_k+0{,}1f(x_k,\ y_k)=y_k-0{,}1y_k=0{,}9y_k.$$

Тогда по формуле (21.99)

$$y_{k+1}=y_k+0{,}2f(x_{k+1/2},\ y_{k+1/2})=y_k+0{,}2(-0{,}9y_k)= \\ =y_k-0{,}18y_k=0{,}82y_k,\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Составляем таблицу приближенного решения с помощью усовершенствованного метода ломаных:

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
y_k	1	0,82	0,6724	0,5514	0,4521	0,3708

Точным же решением исходной задачи Коши является функция $y = e^{-x}$. Составим таблицу ее значений в узлах интегрирования:

Таблица 21.3

x_k	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
y_k	1	0,8187	0,6703	0,5488	0,4493	0,3679

Сравнение значений приближенного и точного решений показывает, что усовершенствованный метод ломаных Эйлера является более точным.

Метод Рунге* — Кутта. Этот метод является одним из методов повышенной точности и относится к одношаговым методам численного интегрирования задачи Коши $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.

Пусть h — шаг интегрирования. Вычисление приближенного значения y_{k+1} решения задачи Коши в точке x_{k+1} *методом Рунге — Кутта* заключается в выполнении следующих операций:

1) на каждом k-м шаге определяем коэффициенты:

$$\begin{aligned} K_1 &= hf(x_k,\ y_k);\\ K_2 &= hf(x_k + h/2,\ y_k + K_1/2);\\ K_3 &= hf(x_k + h/2,\ y_k + K_2/2);\\ K_4 &= hf(x_k + h,\ y_k + K_3); \end{aligned} \qquad (21.100)$$

2) значение y_{k+1} вычисляется по формуле

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4). \qquad (21.101)$$

Обоснование формул (21.100), (21.101) можно найти в книге Н. С. Бахвалова «Численные методы», т. 1. Отметим, что погрешность метода Рунге — Кутта равна $O(h^4)$ на всем участке интегрирования дифференциального уравнения.

Пример 2. Методом Рунге — Кутта решить задачу Коши $y' = -y$, $y(0) = 1$, на отрезке $[0, 1]$ с точностью до 0,005.

□ Выбираем начальный шаг интегрирования h из условия $h^4 < 0{,}005 \Rightarrow h < 0{,}266$. Для удобства вычислений примем $h = 0{,}2$. Весь отрезок интегрирования $[0, 1]$ разобьем на пять равных частей точками $x_k = kh = 0{,}2k$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. По формулам (21.100) при $f(x, y) = -y$ находим коэффициенты:

$K_1 = -0{,}2y_k$;
$K_2 = -0{,}2(y_k + K_1/2) = -0{,}2(y_k - 0{,}1y_k) = -0{,}18y_k$;
$K_3 = -0{,}2(y_k + K_2/2) = -0{,}2(y_k - 0{,}09y_k) = -0{,}182y_k$;
$K_4 = -0{,}2(y_k + K_3) = -0{,}2(y_k - 0{,}182y_k) = -0{,}1636y_k$.

* К.Д.Т. Рунге (1856—1927) — немецкий математик.

Тогда по формуле (21.101)

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(-0{,}2 - 0{,}36 - 0{,}364 - 0{,}1636)y_k = 0{,}8187y_k.$$

Итак, $y_{k+1} = 0{,}8187y_k$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$, $y_0 = 1$.

Составляем таблицу приближенных значений решения исходной задачи Коши, найденных методом Рунге — Кутта:

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
y_k	1	0,8187	0,6703	0,5487	0,4493	0,3678

Сравнив эти значения со значениями табл. 21.3, видим, что требуемая точность вычислений достигнута.

Задачи и упражнения

1. Решить задачу Коши $y' = (1 + y^2)/(1 + x^2)$, $y(0) = 1$, на отрезке $[0; 0{,}5]$ при $x = 0{,}2$ с шагом 0,1: а) методом ломаных Эйлера; б) усовершенствованным методом ломаных Эйлера. Сравнить с точным решением $y = (1 + x)/(1 - x)$.
2. Методом Рунге — Кутта с точностью до 0,01 найти решение задачи Коши $y' = y - x$, $y_0 = 1{,}5$ при $x = 1{,}5$.

21.8. МЕТОД СЕТОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Замена производных разностными соотношениями. Как и обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными не всегда удается решить известными аналитическими методами, т. е. получить решение в явном виде. В этом случае уравнение с частными производными решается приближенно численными методами. В их основе лежит замена частных производных, входящих в уравнение, разностными отношениями.

Рассмотрим ряд Тейлора для функции $f(x)$:

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \ldots, \quad h > 0. \qquad (21.102)$$

Отсюда $f(x + h) \approx f(x) + f'(x)h$, т. е.

$$f'(x) \approx \frac{f(x + h) - f(x)}{h}. \qquad (21.103)$$

Правая часть равенства (21.103), называемая *правой разностной производной,* аппроксимирует производную $f'(x)$ в точке x.

Если в разложении (21.102) заменить h на $-h$, получим *левую разностную производную*

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x - h)}{h}. \qquad (21.104)$$

Из равенств (21.103) и (21.104) нетрудно найти

$$f'(x) \approx \frac{1}{2h}(f(x+h) - f(x-h)). \qquad (21.105)$$

Правая часть этого выражения называется *центральной разностной производной.*

Если в разложении (21.102) справа оставить три слагаемых, то приближенно получим

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2.$$

Заменив здесь h на $-h$, имеем

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2.$$

Из этих двух равенств нетрудно получить *центральную разностную производную*

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}(f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)), \qquad (21.106)$$

аппроксимирующую $f''(x)$.

Формулы (21.103) — (21.106) являются конечно-разностными аппроксимациями производных $f'(x)$ и $f''(x)$. Эти соотношения нетрудно перенести на частные производные от функций многих переменных. В частности, для функции $u(x, y)$ двух переменных x и y они имеют следующий вид:

$$u'_x(x, y) \approx \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} \qquad (21.107)$$

есть правая частная разностная производная по x;

$$u'_x(x, y) \approx \frac{u(x, y) - u(x-h, y)}{h} \qquad (21.108)$$

является левой частной разностной производной по x;

$$u'_x(x, y) \approx \frac{u(x+h, y) - u(x-h, y)}{2h} \qquad (21.109)$$

есть центральная частная разностная производная по x.

Аналогично правая, левая и центральная частные разностные производные по y имеют соответственно вид:

$$u'_y(x, y) \approx \frac{u(x, y+l) - u(x, y)}{l}; \qquad (21.110)$$

$$u'_y(x, y) \approx \frac{u(x, y) - u(x, y-l)}{l}; \qquad (21.111)$$

$$u'_y(x, y) \approx \frac{u(x, y+l) - u(x, y-l)}{2l}. \qquad (21.112)$$

Аналогично формуле (21.106) можно получить следующие аппроксимации вторых частных производных:

$$u''_{xx} \approx \frac{1}{h^2}(u(x+h,\ y) - 2u(x,\ y) + u(x-h,\ y)); \qquad (21.113)$$

$$u''_{yy} \approx \frac{1}{l^2}(u(x,\ y+l) - 2u(x,\ y) + u(x,\ y-l)), \qquad (21.114)$$

называемые центральными частными разностными производными. Для смешаной же центральной частной разностной производной будем иметь

$$u''_{xy} = (u'_x)'_y \approx \frac{1}{2l}(u'_x(x,\ y+l) - u'_x(x,\ y-l))$$

или с учетом формулы (21.109)

$$u''_{xy} \approx \frac{1}{4lh}(u(x+h,\ y+l) - u(x-h,\ y+l) - u(x+h,\ y-l) + u(x-h,\ y-l)). \qquad (21.115)$$

Прямоугольная сетка. Пусть область D ограничена контуром Γ (рис. 21.17). Проведем на плоскости XY семейство прямых:

$$x = x_0 + ih;\ y = y_0 + jl, \qquad (21.116)$$

образующих на этой плоскости *прямоугольную сетку*. Здесь $M_0 = (x_0, y_0) \in D$; h — шаг сетки вдоль оси X; l — шаг сетки вдоль оси Y; $h > 0$, $l > 0$; $i = 0, 1, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots, m$. Точки пересечения прямых (21.116) внутри D образуют множество точек, называемых *узлами сетки* (внутренние узлы). На рис. 21.17 они помечены кружками. Узлы на контуре Γ (граничные узлы) и вне области D помечены звездочками. Заменим область D *сеточной областью,* состоящей из внутренних узлов, граничных и прилегающих к Γ узлам, отмеченным на рисунке звездочками.

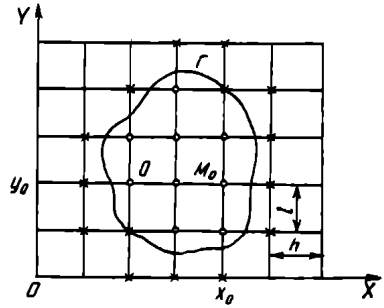


Рис. 21.17

Замена уравнения с частными производными разностными уравнениями. Суть метода сеток численного решения уравнения с частными производными состоит в том, что с помощью уравнения, рассматриваемого в $\bar{D}$, и граничных условий на контуре Γ строятся некоторые соотношения, позволяющие приближенно вычислить значение точного решения $u(x_i, y_j)$ в узлах (x_i, y_j) сетки из $\bar{D}$, где $\bar{D} = D \cup \Gamma$.

Рассмотрим в области $\bar{D}$ с контуром Γ неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами

$$a_{11}u''_{xx} + 2a_{12}u''_{xy} + a_{22}u''_{yy} + a_{13}u'_x + a_{23}u'_y + a_{33}u = f(x,\ y). \qquad (21.117)$$

Построим для $\bar{D}$ с помощью прямых (21.116) описанную выше сеточную область. Пусть $M_0 = (x_0, y_0)$ — внутренняя точка области

D (см. рис. 21.17). Наряду с этой точкой рассмотрим совокупность других внутренних точек (x_i, y_j), $i=0, 1, \ldots, n$, $j=0, 1, \ldots, m$ из D. В каждом таком узле $(x_i, y_j)=(x_0+ih, y_0+jl)$ частные производные, входящие в уравнение (21.117), заменим, например, центральными частными разностными производными (21.109), (21.112) — (21.115). В результате такой замены решение уравнения с частными производными сведется к решению системы $(n+1)\times(m+1)$ линейных разностных уравнений относительно значений $u_{ij}=u(x_i, y_j)=u(x_0+ih, y_0+jl)$ в узлах рассматриваемой сетки:

$$a_{11}\frac{1}{h^2}(u_{i+1,j}-2u_{ij}+u_{i-1,j})+a_{12}\frac{1}{2hl}(u_{i+1,j+1}-u_{i-1,j+1}-$$

$$-u_{i+1,j-1}+u_{i-1,j-1})+a_{22}\frac{1}{l^2}(u_{i,j+1}-2u_{ij}+u_{i,j-1})+$$

$$+\frac{a_{13}}{2h}(u_{i+1,j}-u_{i-1,j})+\frac{a_{23}}{2l}(u_{i,j+1}-u_{i,j-1})+a_{33}u_{ij}=$$

$$=f_{ij}, \qquad (21.118)$$

где f_{ij} — значение $f(x, y)$ в узле (x_i, y_j).

Замена граничных условий. Пусть функция $u(x, y)$ в точках области D удовлетворяет уравнению (21.117), а на ее границе Γ — условию $u|_\Gamma=\varphi(x, y)$, где $\varphi(x, y)$ — непрерывная на Γ функция. Обозначим φ_{ij} значение функции $\varphi(x, y)$ в граничных узлах сетки (или в узлах, ближайших к границе):

$$\varphi_{ij}=\varphi(x_i, y_j)=u_{ij}. \qquad (21.119)$$

Тогда уравнения (21.118) и условия (21.119) образуют систему линейных алгебраических уравнений относительно приближенных значений функции $u(x, y)$ в узлах сетки (x_i, y_j).

Замечание. Если граничные условия заданы в более общем виде

$$\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial n}+\beta u\right)\Big|_\Gamma=\varphi(x, y) \qquad (21.120)$$

($\mathbf{n}$ — нормаль к контуру Γ; α и β — константы), то соответствующим образом изменяются и условия (21.119). Напомним, что $\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta$, где $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ — направляющие косинусы вектора $\mathbf{n}$ нормали к Γ. Если контур Γ задан уравнением $g(x, y)=0$, то $\cos\alpha=g'_x/|\mathbf{grad}\, g|$, $\cos\beta=g'_y/|\mathbf{grad}\, g|$, где $\mathbf{grad}\, g=(g'_x, g'_y)$.

Метод сеток для уравнения теплопроводности. Рассмотрим задачу распространения теплоты в однородном стержне единичной длины. Пусть температура левого конца ($x=0$) стержня постоянна и равна 1, а на правом конце ($x=1$) происходит теплообмен с окружающей средой так, что тепловой поток пропорционален разности температур стержня и среды, температура которой определяется функцией $g(t)$. Начальная температура стержня равна нулю.

В математической постановке эта задача состоит в решении уравнения

$$u'_t=u''_{xx},\ 0<x<1;\ 0<t<+\infty, \qquad (21.121)$$

при граничных условиях

$$u(0,\ t)=1,\ u'_x(1,\ t)=-(u(1,\ t)-g(t)),\ t>0, \qquad (21.122)$$

и начальном условии

$$u(x,\ 0)=0,\ 0\leqslant x\leqslant 1. \qquad (21.123)$$

Задачу (21.121) — (21.123) будем решать методом сеток, для чего построим прямоугольную сетку с помощью прямых $x=ih$, $t=jl$, $i=0,\ 1,\ \ldots,\ n$; $j=0,\ 1,\ \ldots,\ m$ (рис. 21.18). Заметим, что

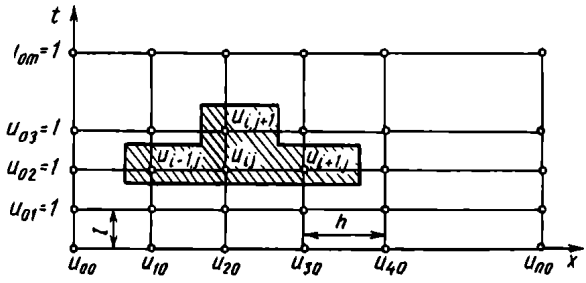


Рис. 21.18

значения u_{i0} решения на нижней стороне сетки известны: согласно равенству (21.123), $u_{i0}=u(x_i,\ 0)=u(ih,\ 0)=0$. Аналогично из первого условия (21.122) значения u_{0j} решения на левой стороне сетки также известны: $u_{0j}=u(0,\ t)=u(0,\ jl)=1$. Задача состоит в том, чтобы найти значения u_{ij} в остальных узлах $(x_i,\ y_j)$ сетки. Заменим производные u'_t и u''_{xx} в уравнении (21.121) их конечно-разностными аппроксимациями (21.110) и (21.113):

$$u'_t\approx\frac{1}{l}(u(x,\ t+l)-u(x,\ t))=\frac{1}{l}(u(ih,\ j(l+1))-u(ih,\ jl))=$$

$$=\frac{1}{l}(u_{i,\ j+1}-u_{ij});$$

$$u''_{xx}\approx\frac{1}{h^2}(u(x+h,\ t)-2u(x,\ t)+u(x-h,\ t))=\frac{1}{h^2}(u((i+1)h,\ jl))-$$

$$-2u(ih,\ jl)+u((i-1)h,\ jl))=\frac{1}{h^2}(u_{i+1,\ j}-2u_{ij}+u_{i-1,\ j}).$$

Подставив эти аппроксимации в уравнение (21.121), получим

$$\frac{1}{l}(u_{i,\ j+1}-u_{ij})=\frac{1}{h^2}(u_{i+1,\ j}-2u_{ij}+u_{i-1,\ j}). \qquad (21.124)$$

На нашей сетке номер горизонтального (временно́го) слоя определяется индексом j, относящимся к временно́й переменной t. Из соотношения (21.124) выразим значение $u_{i,\ j+1}$ решения на последующем временно́м слое:

$$u_{i,\ j+1}=u_{ij}+\frac{l}{h^2}(u_{i+1,\ j}-2u_{ij}+u_{i-1,\ j}). \qquad (21.125)$$

Эта формула выражает решение в данный момент времени $t = (j+1)l$ через решение в предыдущий момент времени $t = jl$. Из формулы (21.125) следует, что для определения $u_{i,\,j+1}$ должны быть известны значения $u_{i-1,\,j}$, u_{ij} и $u_{i+1,\,j}$ на нижнем предыдущем слое, т. е. так называемый *вычислительный шаблон* данной задачи должен иметь вид, изображенный на рис. 21.18. На этом рисунке выделены те значения решения, которые присутствуют в формуле (21.125), задающей алгоритм вычисления.

Аппроксимируем теперь производную в граничном условии (21.122) на правом конце $x = 1$, которому соответствуют узлы $(x_n, y_j) = (1, y_j)$, $j = 0, 1, \ldots, m$. Для этого используем левую разностную производную (21.108), поскольку правая или центральная разностная производная потребовала бы значений функции за пределами сетки. По формуле (21.108)

$$u'_x(1, t) \approx \frac{u(nh, y_j) - u((n-1)h, y_j)}{h} = \frac{1}{h}(u_{nj} - u_{n-1,\,j}). \quad (21.126)$$

Из равенства (21.126) и граничного условия (21.122) получим

$$\frac{1}{h}(u_{nj} - u_{n-1,\,j}) = -(u_{nj} - g_j), \quad (21.127)$$

где $g_j = g(jl)$ — известные значения, $j = 0, 1, \ldots, m$. Из равенства (21.127)

$$u_{nj} = \frac{u_{n-1,\,j} + hg_j}{1+h}. \quad (21.128)$$

Формулы (21.125), (21.128) и составляют вычислительную схему задачи. Ее алгоритм следующий.

Шаг 1. Находим решение по формуле (21.125) на втором временно́м слое при $j = 0$: $u_{i1} + \frac{l}{h^2}(u_{i+1,\,0} - 2u_{i0} + u_{i-1,\,0}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Шаг 2. Величину u_{n1} находим по формуле (21.128):

$$u_{n1} = \frac{u_{n-1,\,1} + hg_1}{1+h}.$$

Совершив шаги 1 и 2, получим значения решения задачи на втором временно́м слое. Для получения решения на третьем временно́м слое в формуле (21.126) необходимо принять $j = 1$:

$$u_{i2} = u_{i1} + \frac{l}{h^2}(u_{i+1,\,1} - 2u_{i1} + u_{i-1,\,1}),\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,$$

а в формуле (21.128) — $j = 2$:

$$u_{n2} = \frac{u_{n-1,\,2} + hg_2}{1+h}.$$

Этот процесс повторяется до последнего слоя $t = ml$.

Метод сеток для волнового уравнения. Рассмотрим одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x, t) \tag{21.129}$$

в прямоугольнике

$$\Pi: 0 \leqslant x \leqslant L, \ 0 \leqslant t \leqslant T$$

при начальных условиях

$$u(x, 0) = f(x), \ u'_t(x, 0) = F(x), \ 0 \leqslant x \leqslant L, \tag{21.130}$$

и при краевых условиях

$$u(0, t) = p(t), \ u(L, t) = q(t). \tag{21.131}$$

Здесь $g(x, t)$, $f(x)$, $F(x)$, $p(t)$ и $g(t)$ — заданные функции, дифференцируемые достаточное число раз, причем выполнены условия согласованности

$$f(0) = u(0, 0) = p(0), \ f(L) = u(L, 0) = q(0).$$

Требуется найти функцию $u = u(x, t)$, удовлетворяющую в области Π уравнению (21.129) и условиям (21.130), (21.131). Эту задачу решим численно.

Как и для уравнения теплопроводности, построим в области Π прямоугольную сетку с помощью прямых $x_i = ih$, $t_j = jl$, $i = 01, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots, m$, где $h = L/n$, $l = T/m$. Обозначим $u_{ij} = u(x_i, t_j) = u(ih, jl)$ — значение функции $u(x, t)$ в узле (i, j). Заменим производные u''_{tt}, u''_{xx} в узле (i, j) центральными разностными производными (21.113) и (21.114):

$$(u''_{tt})_{ij} = \frac{u_{i, j+1} - 2u_{ij} + u_{i, j-1}}{l^2}; \tag{21.132}$$

$$(u''_{xx})_{ij} = \frac{u_{i+1, j} - 2u_{ij} + u_{i-1, j}}{h^2}. \tag{21.133}$$

Пусть $g_{ij} = g(x_i t_j)$. Подставив соотношения (21.132) и (21.133) в уравнение (21.129), получим разностное уравнение

$$\frac{u_{i, j+1} - 2u_{ij} + u_{i, j-1}}{l^2} = a^2 \frac{u_{i+1, j} - 2u_{ij} + u_{i-1, j}}{h^2} + g_{ij}, \tag{21.134}$$

аппроксимирующее волновое уравнение (21.129) в каждом узле (i, j) сетки. Отсюда находим значение функции $u_{i, j+1}$ на $j+1$-м слое:

$$u_{i, j+1} = 2\left(1 - \frac{a^2 l^2}{h^2}\right) u_{ij} + \frac{a^2 l^2}{h^2}(u_{i-1, j} + u_{i+1, j}) - u_{i, j-1} + l^2 g_{ij}. \tag{21.135}$$

Замечаем, что для нахождения неизвестных значений функции $u_{i, j+1}$ на $j+1$-м горизонтальном (временном) слое необходимо знать решения на $j-1$-м и j-м слоях. Другими словами, при замене дифференциального уравнения разностным использованы значения

функции в узлах, лежащих на трех слоях. Такая схема называется трехслойной. Ее шаблон (крест) изображен на рис. 21.19. Начало счета по этой схеме предполагает, согласно формуле (21.135), известными решения на нулевом и первом слоях (горизонтальных и вертикальных). Эти значения находятся с помощью начальных и краевых условий. Согласно первому начальному условию (21.139), на нулевом горизонтальном слое ($j=0$) имеем

$$u_{i0}=u(x_i,\ 0)=f(x_i)=f_i,\ i=0,\ 1,\ \ldots,\ n. \qquad (21.136)$$

Для отыскания решения на первом горизонтальном слое воспользуемся вторым начальным условием (21.130). В нем производную $u_t'(x,\ 0)$ заменим разностным отношением (21.110). В результате получим

$$(u_t')_{i0}=\frac{u(x_i,\ 1\cdot l)-u(x_i,\ 0)}{l}=F(x_i)=F_i,$$

т. е.

$$(u_{i1}-u_{i0})/l=F_i\Rightarrow u_{i1}=u_{i0}+lF_i, \qquad (21.137)$$

где u_{i0} определяется равенством (21.136).

Решение u_{0j} на нулевом вертикальном слое ($i=0$) найдем, используя первое краевое условие (21.131):

$$u_{0j}=u(0,\ t_j)=p(t_j)=p_j,\ j=0,\ 1,\ \ldots,\ m. \qquad (21.138)$$

На последнем вертикальном слое ($i=n$) значения u_{nj} определяются из второго краевого условия (21.131)

$$u_{nj}=u(L,\ t_j)=q(t_j),\ j=0,\ 1,\ \ldots,\ m. \qquad (21.139)$$

Таким образом, краевая задача (21.129) — (21.131) полностью заменена разностными соотношениями (21.135) — (21.139), из которых определяются значения u_{ij} функции u в узлах сетки.

Отсюда вытекает следующий алгоритм нахождения u_{ij}:

Шаг 1. По формулам (21.136) и (21.137) находим решения u_{i0}, u_{i1} на нулевом и первом горизонтальных (временных) слоях, причем $u_{00}=p_0$, $u_{01}=p_1$, согласно равенству (21.138), и $u_{n0}=q_0$, $u_{n1}=q_1$, согласно формуле (21.139).

Шаг 2. Значения u_{i2} на втором горизонтальном слое ($j=2$), $i=1,\ \ldots,\ n-1$, находим по формуле (21.135).

Все последующие значения u_{ij}, $j\geqslant 3$, находим по этой же схеме, используя известные u_{ij} на двух предыдущих горизонтальных слоях.

Замечание. При вычислении значений u_{ij} на первом горизонтальном слое по формуле (21.137) допускается погрешность $O(l)$. Поэтому желательно получить разностное уравнение, аппроксимирующее условие (21.130) более точно. Для этого вместо соотношения (21.137) возьмем более точное представление, разложив u_{i1} по формуле Тейлора:

$$u_{i1}=u_{i0}+l\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}+\frac{l^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad (21.140)$$

где погрешность представления есть $o(l^2)$.

Но $(\partial u/\partial t)|_{t=0}=F(x)$, а из уравнения (21.129) и из начального условия (21.130) имеем

$$\frac{\partial^2 u(x,\ 0)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,\ 0)}{\partial x^2} + g(x,\ 0) = a^2 f''(x) + g(x,\ 0).$$

Тогда соотношение (21.140) примет вид

$$u_{i1} = u_{i0} + lF_i + \frac{l^2 a^2}{2} f_i'' + l^2 g_{i0}, \qquad (21.141)$$

где $f_i'' = f''(x_i)$. Представление (21.141) более точное по сравнению с (21.137) и используется в алгоритме численного решения рассматриваемой задачи.

Пример. Построить конечно-разностную схему для задачи:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{t}{2} x^2,\ 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant t \leqslant 1;$$

$$u|_{t=0} = x^2,\ u_t'|_{t=0} = \sin x,\ 0 \leqslant x \leqslant 2;$$

$$u|_{x=0} = e^t - 1,\ u|_{x=2} = 4 \cos t,\ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

□ Положив $n = m = 10$, построим прямоугольную сетку $x_i = ih$, $t_j = jl$, т. е. $h = 0{,}2$, $l = 0{,}1$. Тогда $x_i = 0{,}2i$, $t_j = 0{,}1j$.

В нашем случае $a = 1$, $g(x,\ t) = tx^2/2$, $f(x) = x^2$, $F(x) = \sin x$, $p(t) = e^t - 1$, $q(t) = 4 \cos t$.

Используя формулу (21.136), будем иметь

$$u_{i0} = f_i = x_i^2 = i^2 h^2 = 0{,}04i^2,\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ 10.$$

По уточненной формуле (21.141) находим

$$u_{i1} = x_i^2 + 0{,}1 \sin x_i + 0{,}005 \cdot 2 = 0{,}04i^2 + 0{,}1 \sin(0{,}2 \cdot x_i) + 0{,}01.$$

Далее, в силу формул (21.138) и (21.139),

$$u_{0j} = p_j = e^{t_j} - 1 = e^{jl} - 1 = e^{0{,}1j} - 1;$$

$$u_{nj} = q_j = 4 \cos t_j = 4 \cos(0{,}1 \cdot j),\ j = 0,\ 1,\ \ldots,\ 10.$$

В соответствии с формулой (21.135) дальнейшее решение осуществляется по схеме

$$u_{i,\ j+1} = 2(1 - 0{,}25)u_{ij} + 0{,}25(u_{i-1,\ j} + u_{i+1,\ j}) - u_{i,\ j-1} + 0{,}01x_i^2 t_j/2 =$$

$$= 1{,}5u_{ij} + 0{,}25(u_{i-1,\ j} + u_{i+1,\ j}) - u_{i,\ j-1} + 2 \cdot 10^{-5} i^2 j,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 9;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ 9.$$

Неявные разностные схемы. Согласно формуле (21.135), значения функции u_{ij} во всех внутренних узлах сетки $x_i = ih$, $t_j = jl$ находятся последовательно, слой за слоем. Такая схема вычислений часто называется *явной*. Однако у нее есть один существенный недостаток. При $l \gg h$ погрешности округления могут стать настолько большими, что полученное решение теряет всякий смысл. Отношение l/h зависит от уравнения и граничных условий. В общем случае должно быть $l \ll h$. В книге А. А. Самарского «Введение в численные методы» (М.: «Наука», 1987) доказано, что для применимости явной схемы должно выполняться условие $l/h^2 \leqslant 0{,}5$. Справедливо следующее эмпирическое правило: если уменьшать l и h, то погрешность аппроксимации частных производных конечно-разностными производными тоже будет уменьшаться, однако чем мельче сетка, тем больше вычислений необходимо совершить и значит тем больше будут погрешности округления.

Существуют и такие схемы, называемые *неявными*, позволяющие вести вычисления без существенного ухудшения точности с гораздо большим шагом, но требующим большего объема вычислений.

Для примера рассмотрим задачу:

$$\frac{\partial u}{dt} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x,\ t),\ 0 \leqslant x \leqslant L,\ 0 \leqslant t \leqslant T; \qquad (21.142)$$

$$u(x,\ 0) = f(x),\ 0 \leqslant x \leqslant L;$$

$$u(0,\ t) = p(t),\ u(L,\ t) = q(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T.$$

В каждом внутреннем узле $(i,\ j)$ сетки производные $\partial u/\partial t$ и $\partial^2 u/\partial x^2$ заменим разностными соотношениями (21.110) и (21.113):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{ij} = (u_{ij} - u_{i,\ j-1})/l;$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ij} = \frac{u_{i+1,\ j} - 2u_{ij} + u_{i-1,\ j}}{h^2}.$$

В результате уравнение (21.142) в каждом внутреннем узле заменяется разностными уравнениями:

$$\frac{u_{ij} - u_{i,\ j-1}}{l} = \frac{u_{i-1,\ j} - 2u_{ij} + u_{i+1,\ j}}{h^2} + g_{ij};$$

$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

или

$$\frac{l}{h^2} u_{i-1,\ j} - \left(1 + \frac{2l}{h^2}\right) u_{ij} + \frac{l}{h^2} u_{i+1,\ j} = -u_{i,\ j-1} - l g_{ij}.$$

Расписывая эти равенства для всех $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$, получим систему $n-1$ линейных уравнений с $n-1$ неизвестными u_{ij} с так называемой *трехдиагональной* матрицей

$$A = \begin{bmatrix} -\left(1+\frac{2l}{h^2}\right) & \frac{l}{h^2} & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{h}{l^2} & -\left(1+\frac{2l}{h^2}\right) & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & \frac{l}{h^2} & -\left(1+\frac{2l}{h^2}\right) & \frac{l}{h^2} \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & \frac{l}{h^2} & -\left(1+\frac{2l}{h^2}\right) \end{bmatrix}$$

или в векторно-матричном виде

$$A\mathbf{x}^j = \mathbf{b}^j,$$

где

$$\mathbf{x}^j = (u_{1j},\ u_{2j},\ \ldots,\ u_{n-1,\ j})^T,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;$$

$$\mathbf{B}^j = (-u_{1,\ j-1} - l g_{1j},\ -u_{2,\ j-1} - l g_{2j},\ \ldots,\ -u_{i-1,\ j-1} - l g_{i-1,\ j})^T.$$

Эта система может быть решена, например, методом Гаусса.

Итак, в неявной схеме на каждом горизонтальном временно́м слое решается линейная система $A\mathbf{x}^j = \mathbf{b}^j$ для нахождения значений u_{ij} во внутренних узлах слоя. Ясно, что здесь на каждом шаге вычислений гораздо больше, чем в явной схеме.

Метод Ритца. Рассмотрим задачу Дирихле

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \qquad (21.143)$$

при нулевых условиях на границе квадрата $\{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$:

$$u(0, y) = 0,\ u(x, 0) = 0,\ u(x, 1) = 0,\ u(1, y) = 0. \qquad (21.144)$$

Эту задачу будем решать *вариационным методом Ритца,* который является одним из наиболее часто используемых в технических приложениях. Он основан на следующей идее. Пусть H — пространство со скалярным произведением, например гильбертово пространство. Тогда решение уравнения $Au = f$, $f \in H$, в этом пространстве есть элемент u^0, который минимизирует функционал $F(u) = (Au, u) - 2(f, u)$,— функцию, принимающую числовые значения. Линейный оператор $\mathbf{A}: H \to H$ называется *самосопряженным*, если $(\mathbf{A}x, y) = (\mathbf{A}y, x)$, $\forall x, y \in H$. При этом линейный оператор $\mathbf{A}$ называется *положительно определенным*, если существует число $m > 0$, $m = m(\mathbf{A})$, такое, что $(\mathbf{A}x, x) \geqslant m \|x\|^2$, где $\|x\|^2 = (x, x)$.

Справедлива

Теорема. Пусть $\mathbf{A}$ — положительно определенный оператор $\mathbf{A}: H \to H$. Для того чтобы при заданном $f \in H$ элемент u^0 был решением уравнения $\mathbf{A}u = f$, необходимо и достаточно, чтобы функционал $F(u) = (u, \mathbf{A}u) - 2(f, u)$ имел при $u = u^0$ минимальное значение.

Последовательность (u_n) элементов пространства H называется *минимизирующей* на множестве $M \subset H$ для функционала $F(x)$, если

$$\lim_{n \to \infty} F(u_n) = d = \inf_{u \in M} F(u).$$

Справедливо утверждение: если $\mathbf{A}: H \to H$ — положительно определенный самосопряженный оператор, то всякая минимизирующая последовательность (u_n) для функционала $F(u) = (x, \mathbf{A}u) - 2(f, u)$ сходится к решению уравнения $\mathbf{A}u = f$.

Доказательство теоремы и этого утверждения опускается.

Для решения задачи (21.142), (21.143) метод Ритца состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Выберем n, а функцию u, минимизирующую функционал

$$I(u) = \int_0^1 \int_0^1 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2u \cdot f \right) dx dy$$

ищем в виде

$$u = a_1 \varphi_1(x, y) + a_2 \varphi_2(x, y) + \ldots + a_n \varphi_n(x, y) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x, y),$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ — заданные линейно независимые функции, обращающиеся в нуль на границе. Например, в качестве функций в данном случае можно взять функции:

$$\varphi_1(x, y) = xy(1 - x)(1 - y),\ \varphi_2 = x\varphi_1(x, y),\ \varphi_3 = y\varphi_1(x, y);$$

$$\varphi_4 = x^2 \varphi_1(x, y),\ \varphi_5 = xy\varphi_1(x, y),\ \varphi_6 = y^2 \varphi_1(x, y),\ \ldots$$

Шаг 2. Функционал $I(\mathbf{a})$ является функцией коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$I(\mathbf{a}) = I(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \int_0^1 \Big(\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \Big)^2 + \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \Big)^2 + \sum_{k=1}^{n} 2 f \varphi_k a_k \Big) dx dy.$$

Из необходимых условий минимума функции $I(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ получаем систему

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial I}{\partial a_1} = 2 \int_0^1 \int_0^1 \Big(\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \Big) a_k + f \varphi_1 \Big) dx dy = 0; \\
&\frac{\partial I}{\partial a_2} = 2 \int_0^1 \int_0^1 \Big(\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \Big) a_k + f \varphi_n \Big) dx dy = 0 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (21.145) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\frac{\partial I}{\partial a_n} = 2 \int_0^1 \int_0^1 \Big(\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} \Big) a_k + f \varphi_n \Big) dx dy = 0.
\end{aligned}$$

n линейных уравнений с n неизвестными $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Шаг 3. Решив систему (21.145) относительно коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, получим минимизирующую функцию

$$u_n(x, y) = a_1 \varphi_1(x, y) + a_2 \varphi_2(x, y) + \ldots + a_n \varphi_n(x, y),$$

являющуюся приближенным решением задачи Дирихле.

Заметим, что мы не доказали, что функция, минимизирующая функционал, является решением уравнения (21.143), но это доказательство проводится в книгах по вариационному исчислению, где указываются правила построения энергетических функционалов для многих других типов граничных условий. Таким образом, большое число краевых задач можно решить, минимизируя соответствующие функционалы.

Замечания о численных и аналитических решениях. Под аналитическими решениями подразумеваются такие, в которых неизвестная функция u выражена посредством независимых переменных и параметров уравнения или системы уравнений в виде формул, рядов, интегралов и т. д. Под численным решением понимается такое решение, которое получено численно после приближенной замены уравнения или системы уравнений другим, более простым уравнением или системой уравнений. Результатом такой замены

обычно является таблица значений решения u_{ij} при некоторых значениях независимых переменных.

Аналитическое решение, записанное в виде формулы, более информативно, так как оно всегда позволяет вычислить значение его в любой точке, а не только в узлах сетки, не прибегая к значениям решения в других точках. Кроме того, аналитическое решение позволяет проследить влияние параметров задачи, начальных и граничных условий на характер решения. Найти, однако, аналитическое решение удается лишь в простейших задачах.

Численные методы решения задачи не выявляют этих закономерностей, поскольку они позволяют находить решение только при заданных параметрах, начальных и граничных условиях.

Главное преимущество численных решений состоит в том, что их можно получить даже в том случае, когда аналитическое решение получить невозможно.

Упражнение. Построить конечно-разностную схему для следующей задачи:

$$u'_t = u''_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0;$$
$$u(0,\ t) = u(1,\ t) = 0,\ t > 0;$$
$$u(x,\ 0) = \sin \pi x;\ 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

ОТВЕТЫ

17.1

3. $x(2)=5$, $x(3)=15$. **4.** а) $4+n$; б) $2^{n/2}\sin\frac{n\pi}{4}$; в) $(C_1+C_2n+C_3n^2)(-1)^n$.

5. а) $x(n)=(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+3\sin\frac{n\pi}{4}\right)$, $y_n=(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}-7\sin\frac{n\pi}{4}\right)$; б) $x(n)=$ $=(-1)^{n+1}$, $y(n)=0$, $z(n)=(-1)^n$.

17.2

1. а) $\frac{az\operatorname{sh}\beta}{z^2-2az\operatorname{ch}\beta+a^2}$; б) $\frac{z(z-a\operatorname{ch}\beta)}{z^2-2az\operatorname{ch}\beta+a^2}$; в) $\ln\frac{1}{z-1}$; г) $\ln\frac{z+1}{z}$.

2. а) $\frac{z(z+1)}{(z-1)^4}$; б) $\frac{1}{z-1}F(z)$. **3.** $\frac{z+1}{z}e^{1/z}$. **4.** а) $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}3^{n-3}$; б) $\frac{1}{3}(4^{n-1}+$ $+15\cdot2^{n-3}-7(-2)^{n-3})$. **5.** а) $x(n)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{12}(-2)^{n+1}+2^{n-1}$, $y(n)=\frac{4}{3}-$ $-\frac{1}{3}(-2)^n-2^n$; б) $x(n)=\frac{5}{4}3^n+\frac{1}{6}n\cdot3^n-\frac{1}{4}$, $y(n)=\frac{1}{4}(1+3^{n+1})+\frac{n}{6}3^n$.

17.3

1. $\frac{e^{\alpha+i\omega}}{e^{\alpha+i\omega}-a}$. **2.** $(-1)^{n+1}\frac{\alpha\sin\alpha\pi}{n^2-\alpha^2}$.

17.4

4. $f'=1(x)-1(x-1)-\delta(x-1)$, $f''=\delta(x)-\delta(x-1)-\delta'(x-1)$.
6. а) $1(x)\sin x-\delta(x)+\delta''(x)$; б) $1(x)e^x+\delta(x)+\delta'(x)$. **7.** а) $\pi(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0))$; б) $i\pi(\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0))$; в) $1/(i\omega)$. **9.** $1(x)f_{\alpha+\beta}(x)$.

18.1

2. $6\cdot5=30$. **3.** $A_5^3=60$. **4.** $\frac{20!}{10!\,5!\,5!}=C_{20}^{10}C_{10}^5C_5^5$.

18.2

2. а) 0,026; б) 0,076. **3.** 0,1. **4.** $(1-r/a)^2$. **5.** 0,55

18.3

1. Нет. 2. 0,329. 3. 0,9. 4. 0,59.

18.4

1. $P_5(0) = 0{,}03$, $P_5(1) = 0{,}16$, $P_5(2) = 0{,}31$, $P_5(3) = 0{,}31$, $P_5(4) = 0{,}16$, $P_5(5) = 0{,}03$. 2. 0,00086. 3. 0,95. 4. 0,173. 5. 0,67. 6. $n \geqslant 16\,641$.

18.5

1.

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p	1/36	1/18	1/12	1/9	5/36	1/6	5/36	1/9	1/12	1/18	1/36

2. $P(1 \leqslant X \leqslant 1{,}5) = 0{,}0919$. 3. а) Да; б) Да.

18.6

1.

X	x_1	x_2	x_3
p	0,25	0,40	0,35

Y	y_1	y_2
p	0,45	0,55

2. $k = 4$, $f_x(x) = 2xe^{-x^2}$, $f_Y(y) = 2ye^{-y^2} = f_Y(y \mid X = x)$.

3. $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{an} y^{1/n-1}, & 0 < y < a^n; \\ 0, & y < 0,\ y > a^n. \end{cases}$

5.

X/Y	0	2	4
p	0,4	0,3	0,3

18.7

1. $M(X^4) = 0{,}7$, $D(X^4) = 0{,}21$. 2. $M(X) = 11/12$, $M(X^2) = 14/9$, $D(X) = 103/104$, $\sigma_x = \sqrt{103/104}$. 5. $M_0(X) = M_e(X) = M(X) = 3$. 6. 0,225.

18.8

1. 0,75. 2. $\begin{bmatrix} 1 & -2/3 \\ -2/3 & 1 \end{bmatrix}$. 3. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

18.9

1. $\frac{2\alpha}{\alpha^2 + x^2}$. 3. $\frac{1}{2} e^{-|x|}$. 4. $1/k$.

18.11

1. 2π. 3. $m = 4$, $\sigma^2 = 1/\sqrt{50}$.

19.1

3. 0,32. 4. а) 10,025; б) 0,637; в) 0,460; г) $-0,480$.

19.2

1. а) 14; б) Выборочная медиана $M_e(X) = 14$; в) 3,6. 2. $\theta_1 = M_e(x)$, $\theta_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |X_i - M_e(X)|$. 3. $y = 3,995 - 2,163x + 0,268x^2$. 4. а) (1,72; 1,74); б) (1,717; 1,743). 5. 0,95. 6. (3,69; 8,31).

19.4

$y = 12,37 - 0,44x$.

20.1

1. $\begin{bmatrix} 0,98 & 0,02 \\ 0,30 & 0,70 \end{bmatrix}$. 2. а) Нет; б) Да. 3. $P^2 = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $p_{11}^{(2)} = 1/16$, $p_{12}^{(2)} = p_{13}^{(2)} = 5/16$. 4. а) (0, 0, 1) или (0, 1, 0); б) (3/11, 8/11).

20.2

1. а) Да; б) Да; в) Да; г) Нет. 3. а) $K_X(t) = 1 + a^2$, $S_X(\omega) = 2\pi(1 + a^2)\delta(t)$.

21.1

1. $\hat{a}_1 = 2,15$, $\hat{a}_2 = 0,162$, $\hat{a}_3 = -0,00164$, $\Delta_1 = 0,0014$, $\Delta_2 = 0,00048$, $\Delta_3 = 0,0000005$, $\delta_1 = 0,0065\ \%$, $\delta_2 = 0,2963\ \%$, $\delta_3 = 0,0305\ \%$. 2. а) $\underline{0,3941}$; б) $\underline{0,11320}$; в) $\underline{14,00231}$. 3. а) $\underline{1,8921}$; б) $\underline{0,02425}$. 4. 4. 5. а) 326,6, $\Delta = 0,09$, $\delta = 0,028\ \%$; б) $18 \cdot 10^3$, $\Delta = 0,18 \cdot 10^3$, $\delta = 0,96\ \%$; в) 0,0016, $\Delta = 0,11 \cdot 10^{-4}$, $\delta = 0,7\ \%$.

21.2

2. 300,72365.

21.3

1. $L_2(x) = 0,0735x^2 - 0,4530x + 0,7474$; $|R_n| \leqslant 0,023$. 2. $L_3(x) = -\frac{1}{15}x^3 - \frac{3}{20}x^2 + \frac{241}{60}x - 3,9$. 3. $P_2(x) = 1,01x^2 - 4,04x + 5,05$.

21.4

1. $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 2$.

21.5

1. $\xi = 1{,}171$. **2.** $\xi = -0{,}7035$. **3.** $\xi = 0{,}1514$. **6.** $x_1 = 3{,}0$, $x_2 = 1{,}0$, $x_3 = -1{,}0$.

21.6

2. 0,9571.

21.7

1. а) 1,4415; б) 1,5926. **2.** 4,74.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

2. Значения функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28521
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	0,49865		3,1	49903	3,2	49931	3,3	49952	3,4	49966
3,5	49977		3,6	49984	3,7	49989	3,8	49993	3,9	49995
4,0	499968									
4,5	499997									
5,0	49999997									

3. χ^2-распределение

n \ p	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
2	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815
3	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	16,266
4	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277	18,467
5	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,515
6	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457
7	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322
8	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,125
9	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	27,877
10	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	31,264
12	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	32,909
13	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
14	18,151	21,064	23,685	26,783	29,141	36,123
15	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
16	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	40,790
18	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
19	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	43,820
20	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	45,315
21	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,797
22	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268
23	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728
24	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179
25	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314	52,620
26	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052
27	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476
28	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,893
29	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	58,302
30	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703

4. Распределение Стьюдента

Число степеней свободы	Вероятность ошибки								
	0,50	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001	0,0001
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,309	636,619	6366,198
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,327	31,598	99,992
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,214	12,924	28,000
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610	15,544
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869	11,178
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959	9,082
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408	7,885
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041	7,120
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781	6,594
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587	6,211
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437	5,921
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318	5,694
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221	5,513
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140	5,363
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073	5,239
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015	5,134
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965	5,044
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922	4,966
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883	4,897
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850	4,837
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819	4,784
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792	4,736
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767	4,693
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745	4,654
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725	4,619
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707	4,587
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690	4,558
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674	4,530
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659	4,506
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646	4,482
35	0,682	1,306	1,690	2,030	2,438	2,724	3,340	3,591	4,389
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551	4,321
45	0,680	1,301	1,679	2,014	2,412	2,690	3,281	3,520	4,269
50	0,679	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261	3,496	4,228
60	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460	4,169
70	0,678	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648	3,211	3,435	4,127
80	0,678	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,416	4,096
90	0,677	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632	3,183	3,402	4,072
100	0,677	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	3,174	3,390	4,053
120	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160	3,373	4,025
200	0,676	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,340	3,970
500	0,675	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,107	3,310	3,922
1000	0,675	1,282	1,646	1,962	2,330	2,581	3,098	3,300	3,906
∞	0,675	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,290	3,891

5. Нормальное распределение

Квантили распределения: $p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^\infty e^{-x^2/2} dx$

p	z	p	z	p	z
0,50	0,000	0,68	−0,468	0,86	−1,080
0,51	−0,025	0,69	−0,496	0,87	−1,126
0,52	−0,050	0,70	−0,524	0,88	−1,175
0,53	−0,075	0,71	−0,553	0,89	−1,227
0,54	−0,100	0,72	−0,583	0,90	−1,282
0,55	−0,126	0,73	−0,613	0,91	−1,341
0,56	−0,151	0,74	−0,643	0,92	−1,405
0,57	−0,176	0,75	−0,674	0,93	−1,476
0,58	−0,202	0,76	−0,706	0,94	−1,555
0,59	−0,228	0,77	−0,739	0,95	−1,645
0,60	−0,253	0,78	−0,772	0,96	−1,751
0,61	−0,279	0,79	−0,806	0,97	−1,881
0,62	−0,305	0,80	−0,842	0,98	−2,054
0,63	−0,332	0,81	−0,878	0,99	−2,326
0,64	−0,358	0,82	−0,915	0,999	−3,090
0,65	−0,385	0,83	−0,954	0,9999	−3,720
0,66	−0,412	0,84	−0,994	0,99999	−4,265
0,67	−0,440	0,85	−1,036		

ЛИТЕРАТУРА

Бахвалов Н. С. Численные методы.— М.: Наука, 1973.— Т. 1.— 632 с.

Волков Е. А. Численные методы.— М.: Наука, 1983.— 254 с.

Герасимович А. И. Математическая статистика.— Мн: Выш. шк., 1983.— 280 с.

Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.— М.: Высш. шк., 1975.— 336 с.

Данилина Н. И., Дубровская Н. С., Кваша О. П., Смирнов Г. Л. Вычислительная математика.— М.: Высш. шк., 1985.— 472 с.

Коваленко И. Н., Филиппова А. А. Теория вероятностей и математическая статистика.— М.: Высш. шк., 1982.— 256 с.

Плис А. И., Сливина Н. А. Лабораторный практикум по высшей математике.— М.: Высш. шк., 1983.— 208 с.

Пугачев В. С. Теория вероятностей и математическая статистика.— М.: Наука, 1979.— 496 с.

Пытьев Ю. П., Шишмарев И. А. Курс теории вероятностей и математической статистики для физиков.— М.: Изд-во МГУ, 1983.— 252 с.

Розанов Ю. А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика.— М.: Наука, 1985.— 320 с.

Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения.— М.: Мир, 1984.— Т. 1.— 528 с.

Чудесенко В. Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (ТР).— М.: Высш. шк., 1983.— 112 с.

Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс.— М.: Изд-во МГУ, 1984.— 206 с.

Учебное издание

Жевняк Ростислав Михайлович
Карпук Андрей Андреевич

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА.
Ч. V.

Заведующий редакцией Е. В. Сукач
Редактор Л. Н. Базулько
Младший редактор И. В. Моховикова
Художник переплета
и художественный редактор Ю. С. Сергачев
Технический редактор М. Н. Кислякова, И. П. Тихонова
Корректор Н. И. Бондаренко

ИБ № 2521

Сдано в набор 05.06.87. Подписано в печать 05.04.88. Формат 60×90/16. Бумага кн.-журнальная. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 16. Усл. кр.-отт. 16,25. Уч.-изд. л. 16,83. Тираж 10 000 экз. Зак. 501. Цена 85 к.

Издательство «Вышэйшая школа» Государственного комитета БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 220048, Минск, проспект Машерова, 11.

Минский ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинат МГПО им. Я. Коласа. 220005, Минск, ул. Красная, 23

Жевняк Р. М., Карпук А. А.

Ж 45 Высшая математика: Учеб. пособие для втузов. Ч. V.— Мн.: Выш. шк., 1988.— 253 с.: ил.

ISBN 5-339-00007-9.

Рассматриваются разностные уравнения, преобразование Лорана, элементы теории обобщенных функций, теория вероятностей и математическая статистика, основы теории случайных процессов и элементарные численные методы. Подробно разбираются решения задач и упражнений, приводятся задачи для самостоятельного решения.

Для студентов технических специальностей вузов.

1702010000—045

Ж ——————— 8—88

М304(03)—88

ББК 22.11я73